

動態模型步態生成與穩定性分析

陳仲禮

本文章將先介紹四足動物的奔跑步態，利用 Two-Rolling-Legs with Waist actuation (TRLW)模型模擬步態的生成。在多維度的初始條件空間中作最佳化演算法的搜尋，找出 pronk 與 bound 步態的 fixed point 分布情形，並對其穩定性質做探討。

TRL 模型

Two-Rolling-Legs (TRL)模型是由黃群凱學長所建立的，用以描述機器人的對稱步態，如 bounding 與 pronking。TRL 模型是由兩個無質量且具滾動特性的扭簧腳與一具有質量和轉動慣量的剛體機身所組成。其腳部是仿造單質點的 RSLIP 模型，由單質點桿子與圓弧形無質量、轉動慣量的剛體組成；但其質心位置則是剛體機身的中間。模型參數如圖 2-4 與表 2-1 所示：

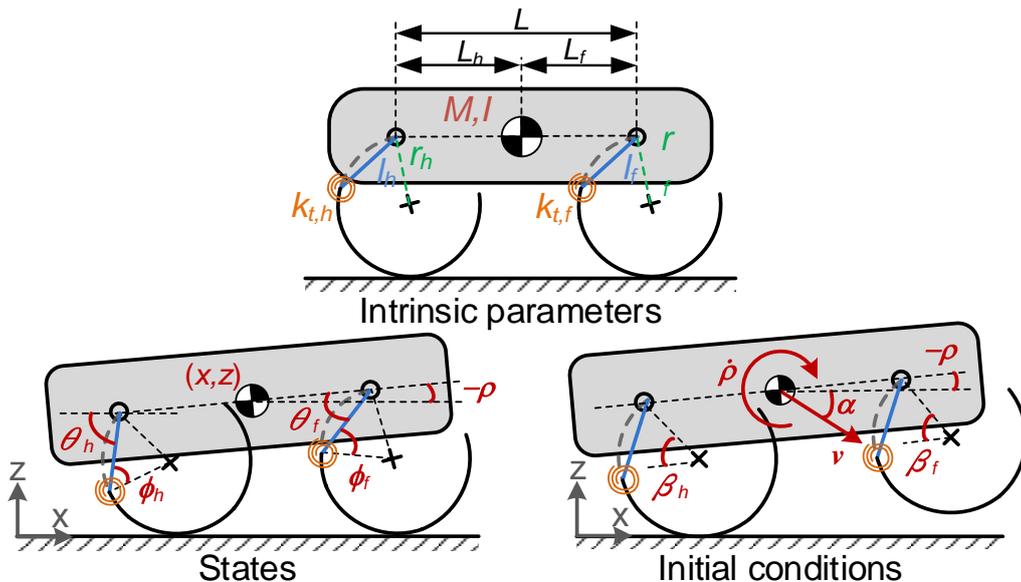


表 2-1 TRL 模型參數、系統變數、初始條件

物理參數	
M	機身質量
I	機身轉動慣量
L_i	質心到轉軸的距離
L	前後轉軸的距離
r_i	圓形腳半徑
l_i	扭簧到轉軸的距離
$k_{t,i}$	扭簧彈性係數
系統變數	
(x,z)	質心位置
ρ	機身俯角
θ_i	半圓腳姿態 (相對於世界座標 x 軸)
ϕ_i	扭簧夾角
初始條件	
v	落地速度大小
α	落地速度角度
ρ	落地機身角度
$\dot{\rho}$	落地機身角速度
β_i	落地角度(相對於機身座標 x 軸)
$i \in \{f, h\}$ f: 前 h: 後. $L = L_f + L_h$	

相較於 RSLIP 模型，TRL 模型加入了剛體機身，可從而分析機身俯角 (pitch) 對動態系統造成的影響。另外雙腳使得模型的階段分為四種：後腳站立、前腳站立、雙腳站立、在空階段。由於 TRL 模型可當作 TRLW 模型下腰部軌跡固定的一種特例，因此不再贅述此模型推導過程。對此模型的步態分析也將與 TRLW 模型合併於後討論。

建立 TRLW 模型之架構

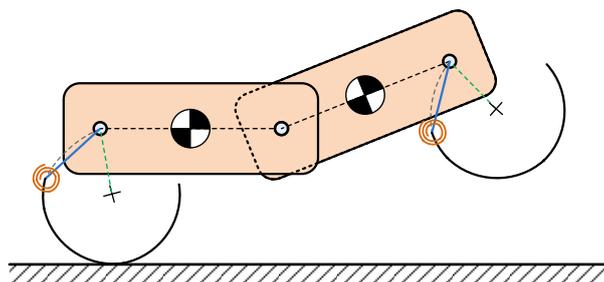


圖 2-5 TRLW 模型

Two-Rolling-Legs with Waist actuation (TRLW)模型的設計是為了瞭解腰部擺動對於動態步態的影響，是基於 TRL 模型修改而來。TRLW 模型由兩個無質量且具滾動特性的扭簧腳和兩塊剛體的機身組成，中間腰部有主動的旋轉軸，如圖 2-5 所示。TRLW 模型與 TRL 模型一樣分為四個階段：後腳站立、前腳站立、雙腳站立、在空階段。與 TRL 模型不同的地方是中間腰部的轉軸，為了使腰於在地階段時不會垮下，起初的想法是在腰部轉軸上加一虛擬扭簧。但此法有幾項缺點，第一，虛擬扭簧的彈性常數仍待決定，因為並非實際的彈性機構，沒有辦法藉由實驗量測估計。第二，在實際模擬尋找 fixed point 時，其結果常會產生多次擺動的週期軌跡，如圖 2-6 所示。此種在極短時間改變方向的軌跡，受限於馬達扭力的限制，在實際的機器人身上難以實現。且這並不符合生物上的直覺，應為單峰之週期軌跡。故決定改變 TRLW 模型腰部的策略，將腰部轉軸的自由度限制住，使得其並非隨被動的系統動態所決定，而是主動出力使其行走在一給定的週期性平滑軌跡，並藉由調整軌跡的參數來找到適合的步態。

步態介紹

步態是用來描述足類動物行走、奔跑的模式。改變落地順序、落地時間會產生不同的行走模式。動物的行走模式會侷限於特定的範圍中，並把這個範圍區分成數種步態，如 trotting、bounding、pronking 等。

動物行走所採取的步態會受行走速度、新陳代謝、物種等因素影響而有所不同。馬在低速行走加速到高速奔跑時，步態會從 walk 變成 trot，最後變成 gallop，其步態轉換的臨界速度與耗氧量相關[21]。Walk、trot、gallop 分別是低速、中速、高速區域中耗氧量最低的步態。在不同物種下，身體結構組成影響了快速奔跑時的效率及穩定性。同樣在高速奔跑下，獵豹的步態是 bound，而瞪羚則是 prong。由此可知步態的選擇是生物行走、奔跑上很重要的一個環節。

四足動物的步態主要可分為兩大類，對稱步態(symmetrical gait)與非對稱步態(asymmetrical gait)。對稱步態的定義為左半身的腳步順序與踏的時間與右半身相同，但時間相位差 180 度，如 pace、trot。反之則為非對稱步態，如 bound、prong、gallop。圖 3-1 為四足動物的常見步態，灰色與白色區域分別代表各腳的落地與騰空時間。

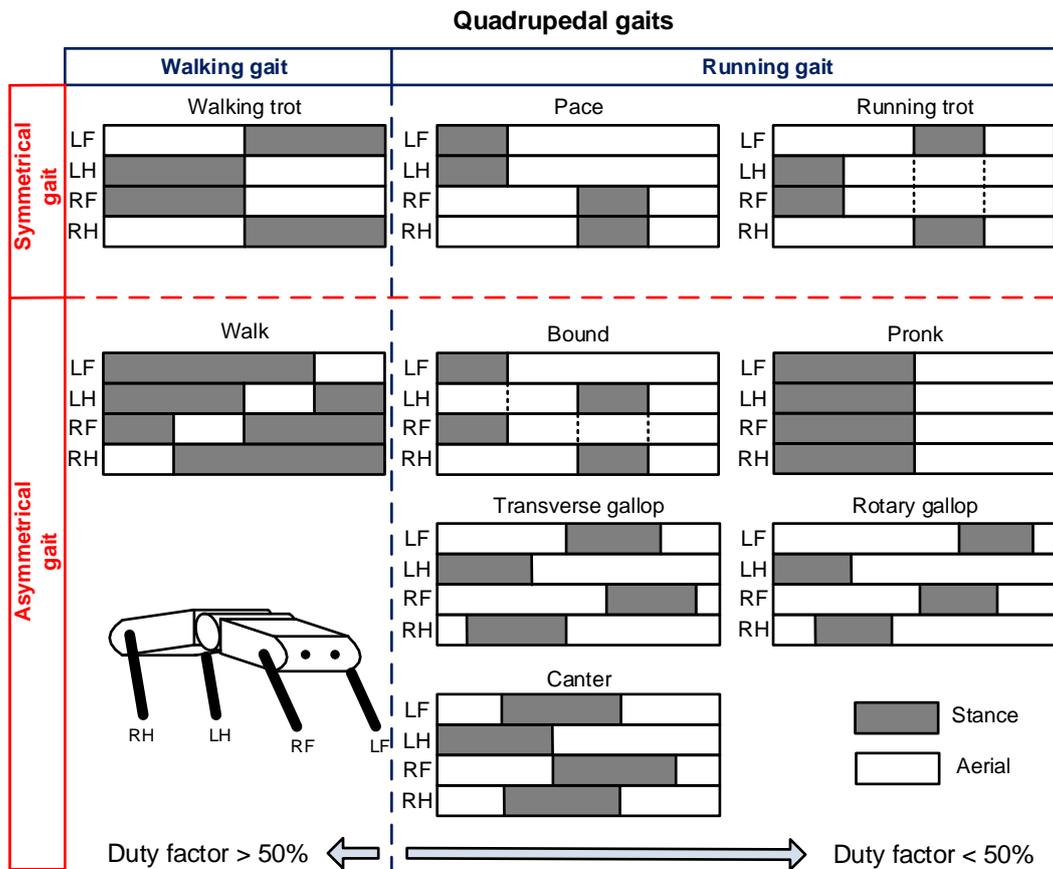


圖 3-1 四足動物的常見步態

對稱步態中，左、右半身的動作是相同的，故只需觀察半邊身體的一對前

後腳。若假設前後腳踏的時間相同，則只需要後腳佔地比與前腳落後相位比例兩個參數便能描述所有可能的步態。如圖 3-2 所示。

在非對稱步態中，腳步落地的節奏不再侷限於兩拍(beat)，有很大的可變化性。單拍的 pronk，兩拍的 bound、三拍的 canter、四拍的 gallop。其中，canter 與 gallop 牽涉到 3D 空間的旋轉，運動模式較為複雜。本文目標將在分析 pronk 與 bound 步態，將四足的前、後對腳對應到 TRLW 模型的前後腳。因此模型中圓形腳的等效扭簧彈力常數為實際原形腳之兩倍。圖 3-3 為 TRLW 對應不同步態的等效 K_t 。

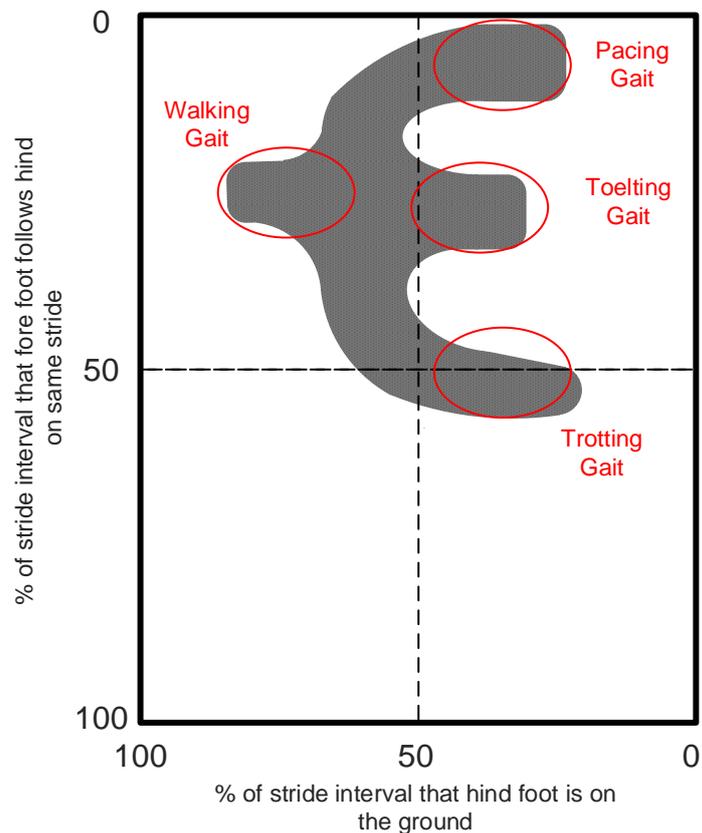


圖 3-2 馬對稱步態的分布區域，引用自 Hildebrand[22]

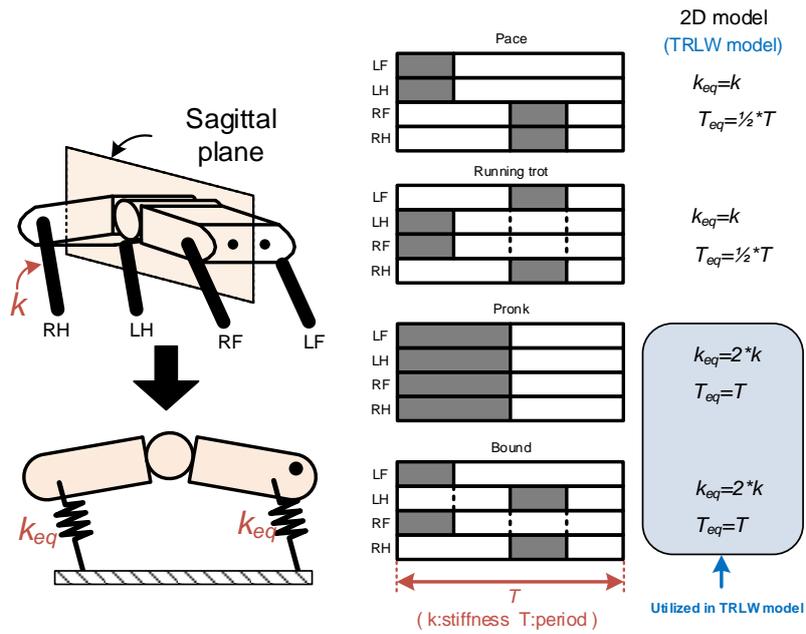


圖 3-3 TRLW 模型在各步態的等效 K_t

pronk 步態一般是指前後腳同時落地、離地，但此情況在有 pitch 擾動的條件下很難達成。因此我將放寬 pronk 步態的尋找條件，僅限制其在模型中的順序為：後腳站立→雙腳站立→後腳站立→在空階段，如圖 3-4。本文後面所稱之 pronk 步態皆指上述順序的步態。

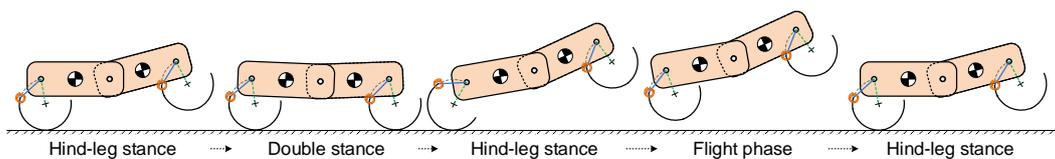


圖 3-4 TRLW 模型 pronk 步態的階段順序

bound 步態的特徵是有兩段獨立的在空階段，其在模型中的階段順序為：後腳站立→在空階段→前腳站立→在空階段，如圖 3-5。

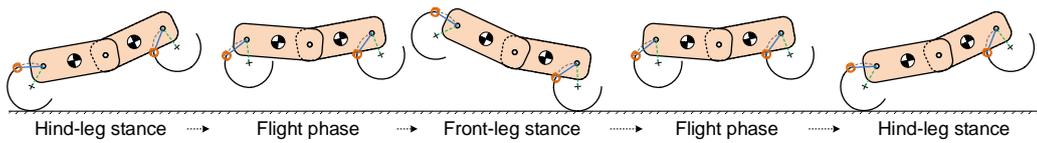


圖 3-5 TRLW 模型 bound 步態的階段順序

穩定性分析流程

運用 Lagrange's equations 所推導出的系統微分方程式，經過 MATLAB 的 ode45 函數模擬便能得到模型隨時間的演化過程。模型狀態在動態系統空間中的運動軌跡將對應到實際機器人上的步態，因此，藉由尋找到良好的週期性軌跡，期望在機器人上也能達成良好的奔跑步態。

在動態系統的研究中，Poincaré map (或稱 return map) 是一常見分析週期性運動的方法，用於判斷此動態系統的穩定性。Poincaré map 的概念是將連續系統的週期運動當作離散的映射(mapping)，以此離散映射的穩定性來代表原本連續系統的穩定性。首先需要在連續動態系統空間中選擇一個參考截面，稱作 Poincaré section (或稱 Poincaré plane)。如圖 3-6 所示，從 Poincaré section 上一初始點 x 出發的軌跡，經過一個週期後再度回到 Poincaré section 上的 x' ，這個從 x 到 x' 的映射 P 即稱為 Poincaré map。在系統中可能存在某些特別的初始條件能滿足

$$x = P(x) \quad (\text{式 3-1})$$

使得在映射之後回到同一個初始點，這類初始條件稱作此動態系統中的 fixed point，其對應的週期軌跡稱為極限圈(limit cycle)。當觀察 Poincaré section，原本連續的週期軌跡會形成一離散序列，這序列有可能會逐漸收斂到某一 fixed point 或是更高維度的吸引子(attractor)，抑或是發散。在非時變系統中，原本連續系統軌跡與 Poincaré section 上離散序列會有相同的收斂性質。因此，Poincaré map 的 Jacobian matrix J 是判斷 fixed point 的穩定性的關鍵，當 J 之

特徵值(eigenvalue)的絕對值小於 1 時代表為穩定 fixed point，其周遭必有一收斂區域(basin of attraction)將此 fixed point 完全包覆。反之，則為不穩定的 fixed point，其收斂區域是有缺陷的。

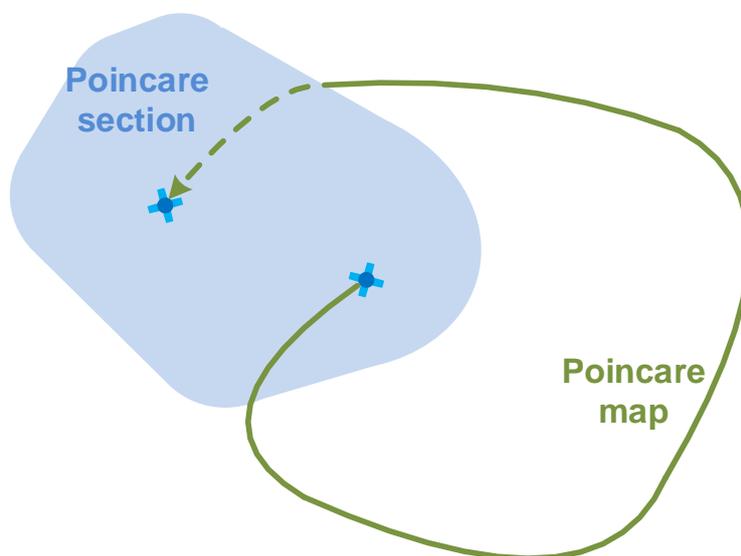


圖 3-6 Poincaré map 示意圖

尋找 TRLW 模型的 fixed points

初始條件空間

對 bound 而言，選擇前腳落地或後腳落地為 Poincare section 並無太大差異。但在 pronk 步態中前腳落地是發生在後腳站立階段之後，因此若選擇前腳落地為 Poincare section 會增加初始條件的維度。為方便之後的與 bound 一起分析比較，將選定 Poincare section 為後腳著地的瞬間。以此可列出模型的初始條件

$$I.C. = (x, \dot{x}, z, \dot{z}, \rho_b, \dot{\rho}_b, \beta_h, \beta_f, A, W, P, D) \quad (\text{式 3-2})$$

其中，初始條件需滿足後腳觸地的約束式，故 z 可由式 2-15 求得。另外， x 的初始值並不影響系統動態，將直接以 0 代入。把剩餘的參數分為系統狀態 \mathbb{x} 與控制參數 \mathbb{u}

$$\mathbb{x} = (\dot{x}, \dot{z}, \rho_b, \dot{\rho}_b)$$

$$\mathbb{w} = (\beta_h, \beta_f, A, W, P, D) \quad (式 3-3)$$

其每步之間的映射關係為

$$\mathbf{x}' = P(\mathbf{x}, \mathbb{w}) \quad (式 3-4)$$

\mathbf{x} 與 \mathbb{w} 是搜尋 fixed point 的範圍空間，加總達到 10 個維度。在這類高維度空間中使用固定間隔的全域搜尋所需花費的時間將是天文數字。為了能在有限的計算能力下探索高維度的系統，將利用最佳化的演算法來進行搜索。最佳化演算法的是以降低代價函數(cost function)為目標，大幅減少計算時間。但其結果可能受最佳化的初始值影響，導致收斂在區域最佳點(local minimum)。

代價函數

在 RSLIP 模型中，系統受能量守恆之限制，每一步之間速度大小不變，僅有速度角度 α 的變化。Fixed point 只需滿足單一限制 $|\Delta\alpha| = 0$ ，在 TRLW 中，fixed point 需同時滿足多個系統狀態的變化值為零，但各個變數的單位不同，如何決定一公平的代價函數將是一個問題。換句話說，若使用加總各狀態項的變化量當作代價函數時，必須要調整出一組適合的加權比例係數使得代價函數對各變數的梯度是均勻且足夠大的。此外，主動的腰部軌跡使得系統會有能量進出，若頭尾之能量不等必定不可能為 fixed point。為了滿足上述限制且對每個變數有一公平的標準，此處採用能量的觀點來建立代價函數。計算前後半身的各動能分項與位能分項在兩次經過 Poincare section 時的變化量，將其除以初始的能量值加總當作代價函數：

$$COST(\mathbf{x}, \mathbb{w}) = \frac{\sum_{i=h,f} (|\Delta T_{i,x}| + |\Delta T_{i,z}| + |\Delta T_{i,r}| + |\Delta V_{i,g}| + |\Delta V_{i,kt}|)}{\sum_{i=h,f} (|(T_{i,x})_{ini}| + |(T_{i,z})_{ini}| + |(T_{i,r})_{ini}| + (V_{i,g})_{ini} + (V_{i,kt})_{ini})} \quad (式 3-5)$$

其中

$$T_{h,x} = \frac{1}{2} M(\dot{x} + L\dot{\rho}_h \sin(\rho_h)) |\dot{x} + L\dot{\rho}_h \sin(\rho_h)|$$

$$T_{h,z} = \frac{1}{2} M(\dot{z} - L\dot{\rho}_h \cos(\rho_h)) |\dot{z} - L\dot{\rho}_h \cos(\rho_h)|$$

$$T_{h,r} = \frac{1}{2} I \dot{\rho}_h |\dot{\rho}_h|$$

$$T_{f,x} = \frac{1}{2} M (\dot{x} - L \dot{\rho}_f \sin(\rho_f)) |\dot{x} - L \dot{\rho}_f \sin(\rho_f)|$$

$$T_{f,z} = \frac{1}{2} M (\dot{z} + L \dot{\rho}_f \cos(\rho_f)) |\dot{z} + L \dot{\rho}_f \cos(\rho_f)|$$

$$T_{f,r} = \frac{1}{2} I \dot{\rho}_f |\dot{\rho}_f|$$

$$V_{h,g} = Mg(z - L \sin(\rho_h))$$

$$V_{h,kt} = \frac{1}{2} k_t (\phi_h - \phi_{h,0})^2$$

$$V_{f,g} = Mg(z + L \sin(\rho_f))$$

$$V_{f,kt} = \frac{1}{2} k_t (\phi_f - \phi_{f,0})^2 .$$

為避免動能項發生頭尾差一負號的情形(ex: $\dot{\rho}_{h\text{ini}} = -\dot{\rho}_{h\text{end}}$)，動能項會多乘此項變數的正負號。每個能量子項都分別有對應到系統的各個狀態，使用能量的變化量可解決單位不同之問題。

在有腰部運動的模擬中會發生模擬週期與腰部軌跡週期不等的問題。因此在會在代價函數上增加一時間誤差的補償項，變成：

$$COST2(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = COST(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + ratio_t \left| simulation_period - \frac{2\pi}{W} \right| \quad (式 3-6)$$

其中 $ratio_t$ 是經由模擬測試出的適當比例，單位為(1/s)。

搜尋 fixed point 的演算法

當 (\mathbf{x}, \mathbf{w}) 的代價函數越小，代表此初始條件越接近為 fixed point。本文將數值模擬之 fixed point 定義為代價函數小於 1% 的初始條件。在搜尋時，將重新分為兩類：

$$\mathbf{s} = \rho_b, \dot{\rho}_b, \dot{x}, \dot{z}, W, P$$

$$\mathbf{c} = \beta_h, \beta_f, A, D \quad (式 3-7)$$

\mathbf{s} 是最佳化變數， \mathbf{c} 是固定參數。在 \mathbf{c} 的空間中撒網格狀的固定點，在這些固定的 \mathbf{c} 下利用 MATLAB 的 fmincon 函數找到 \mathbf{s} 的空間中代價函數最小值發生處。

這裡把原屬控制參數的 W, P 歸類於需最佳化變數的原因是有二。第一， c 是網格狀分割計算， c 的維度增加其計算量會跟著大幅增加。第二，fixed point 在 W 方向的分布很窄(在其餘控制參數固定時)。針對 c 之空間的搜尋順序，簡述步驟如下

1. 利用最佳化搜尋(s, c)的所在空間，產生一代價函數極小(小於 10^{-5})的搜尋初始點(s_0, c_0)。此時的搜尋上、下界無特別限制，是將全部的搜尋空間包住
2. 從已得到的 fixed point (s_{last}, c_{last})向外擴張，以 c_{last} 為中心向其每個維度隔壁的 c_{new} 移動。
3. 將 s_{last} 當成最佳化的初始值，在 s 的空間中找出新的代價函數最小的初始條件(s_{new}, c_{new})。
4. 若此點有滿足 fixed point 的條件(代價函數小於 1%)，則將(s_{new}, c_{new})當作(s_{last}, c_{last})，重複步驟 2、3 和 4。
5. 在完成步驟 2、3 與 4，直到沒有新的 fixed point 後，重新針對所有 fixed point 附近作最佳化，多次執行此步驟能使結果更為完整。

上述尋找步驟之示意圖如圖 3-7，整體的概念是利用系統的連續性，在小範圍的參數擾動下，fixed point 不會產生太大的移動。從一已知的 fixed point 向外擴張，便能得到大範圍的 fixed point 分布狀況。

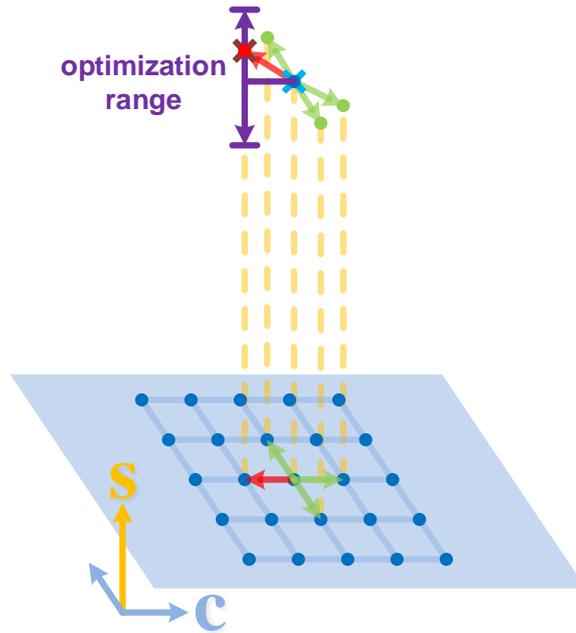


圖 3-7 搜尋法示意圖

TRLW 模型 fixed points 的分布情形與其穩定性

基於上一節的方法，雖然已降低許多計算量，但對一般電腦來說還是需要很長的計算時間。本節的計算結果是使用台大計算機及網路資訊中心的高效能運算服務，最多可同時使用 9 個節點、總共 63 個核心的 matlab 平行計算。關於模型中所使用之物理參數如表 3-1，其數值是參考 TWIX 機器人。Pronk 步態及 bound 步態的 fixed points 分布情形分別展示於圖 3-8 與圖 3-9。圖中橫、縱坐標分別為前、後腳落的角度，每一直行、橫列分別代表為腰部軌跡的振幅 A 、偏移 D ，圖

(a)~(h) 中顏色分別為 $\rho_b, \rho_b, \dot{x}, \dot{z}, \frac{2\pi}{W}, P, \max(|eigenvalue|), COST$ 的大小。

表 3-1 TWIX 機器人之模型參數

模型參數	符號	TWIX 機器人
半身機身質量	M_i	4.49kg
半身機身轉動慣量	J_i	0.02kg*m ²
圓形腳半徑	r_i	0.075m
扭簧到腳部轉軸的距離	a_i	0.0817m
腳部轉軸到的質心距離	b_i	0.125m
質心到腰部轉軸的距離	c_i	0.125m
扭簧彈性係數	K_i	24.32N-m/rad

$i \in \{h, f\}$ f: 前半身 h: 後半身

Pronk 步態之 fixed point

圖 3-8 中可看出有許多大面積的空白處，代表搜尋法可能遇到了系統特性的變化，如模型起跳高度不足、腳步扭簧撞地、數值模擬的奇異點(singular point)...等。因此，無法利用連續性的假設繼續擴展步態範圍。在這初始步態區域的邊界之外可能沒有能形成 fixed point 的步態，但也可能在此固定參數 c 下存在別種步態能的 fixed point。就圖 3-8 中 pronk 步態而言，fixed point 的邊界明顯受到 A 與 D 的影響，當 A 變大 D 變小時，會完全找不到 fixed point。觀察模擬的動畫發現主因是前腳扭簧撞地導致奇異點產生，使得 ODE45 模擬中斷。至於圖中左下角出現許多小塊空白點則大多是最佳化時收斂在區域最佳解使得代價函數值太高而被剔除。若重複上一節的步驟五應可減少此現象。關於初始狀態如何影響 fixed point 分布，以下將針對圖 3-8 的(a)~(h)個別探討：

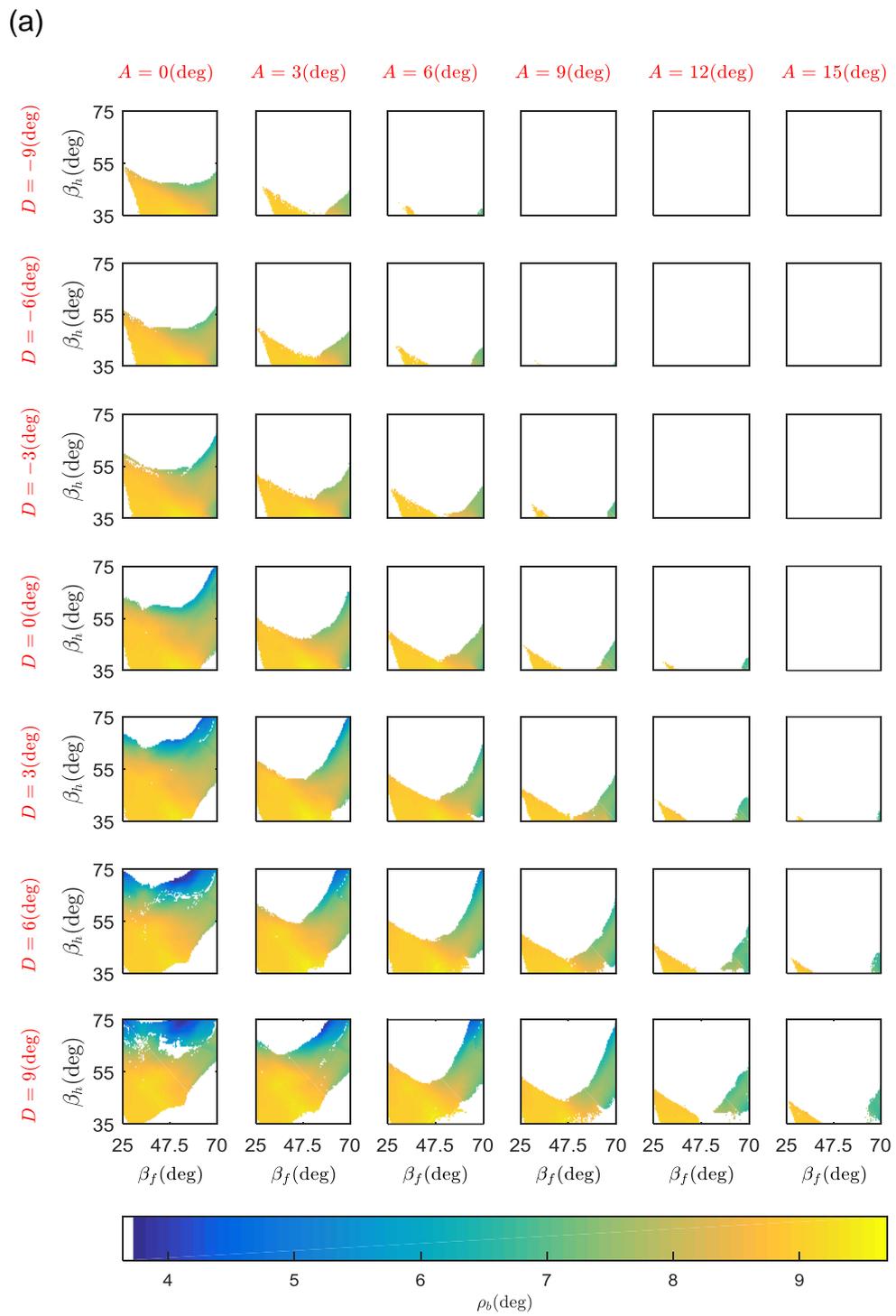


圖 3-8 pronk 步態 fixed points 分布(a) ρ_b

(b)

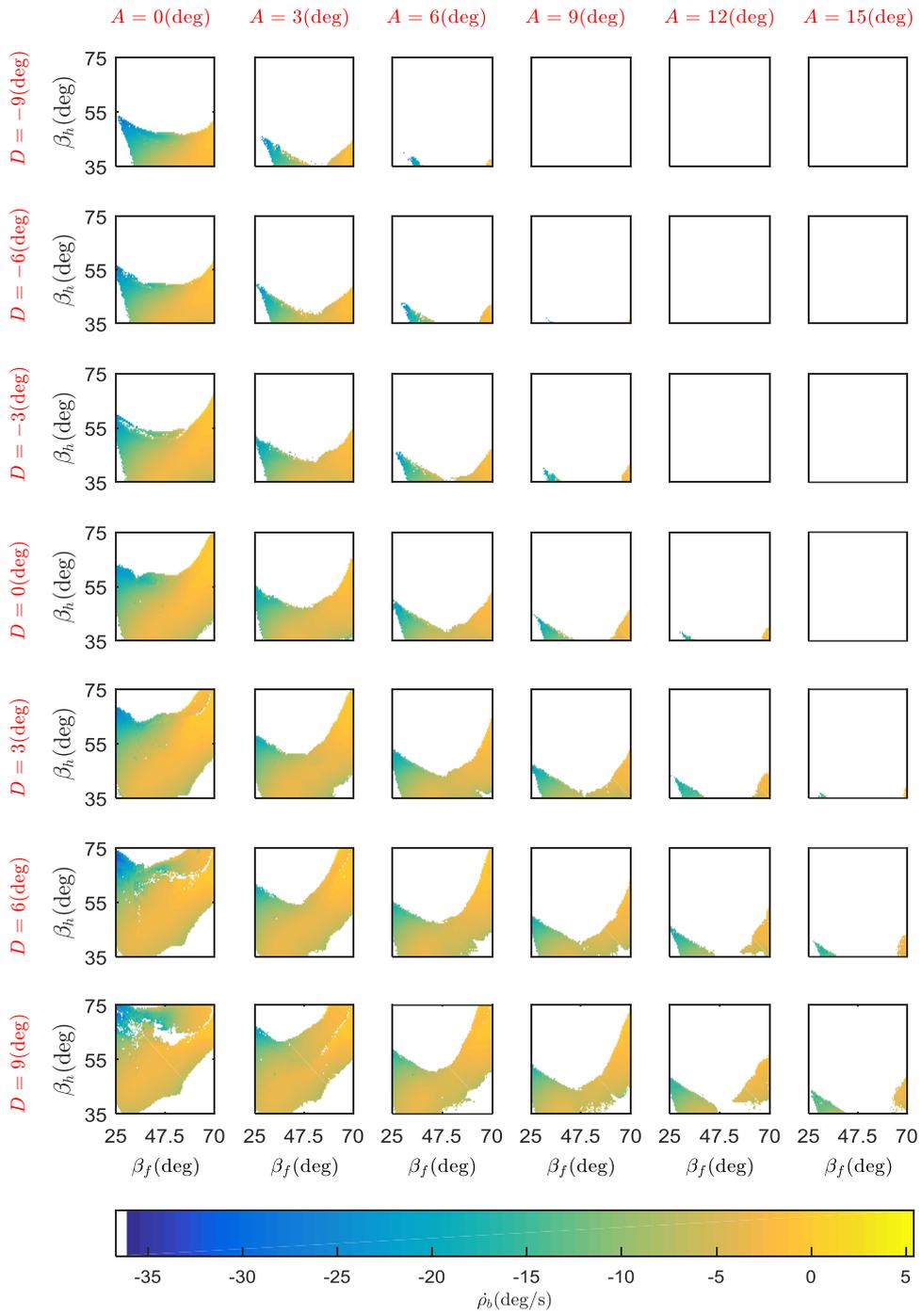


圖 3-8 pronk 步態 fixed points 分布(b) $\dot{\rho}_b$

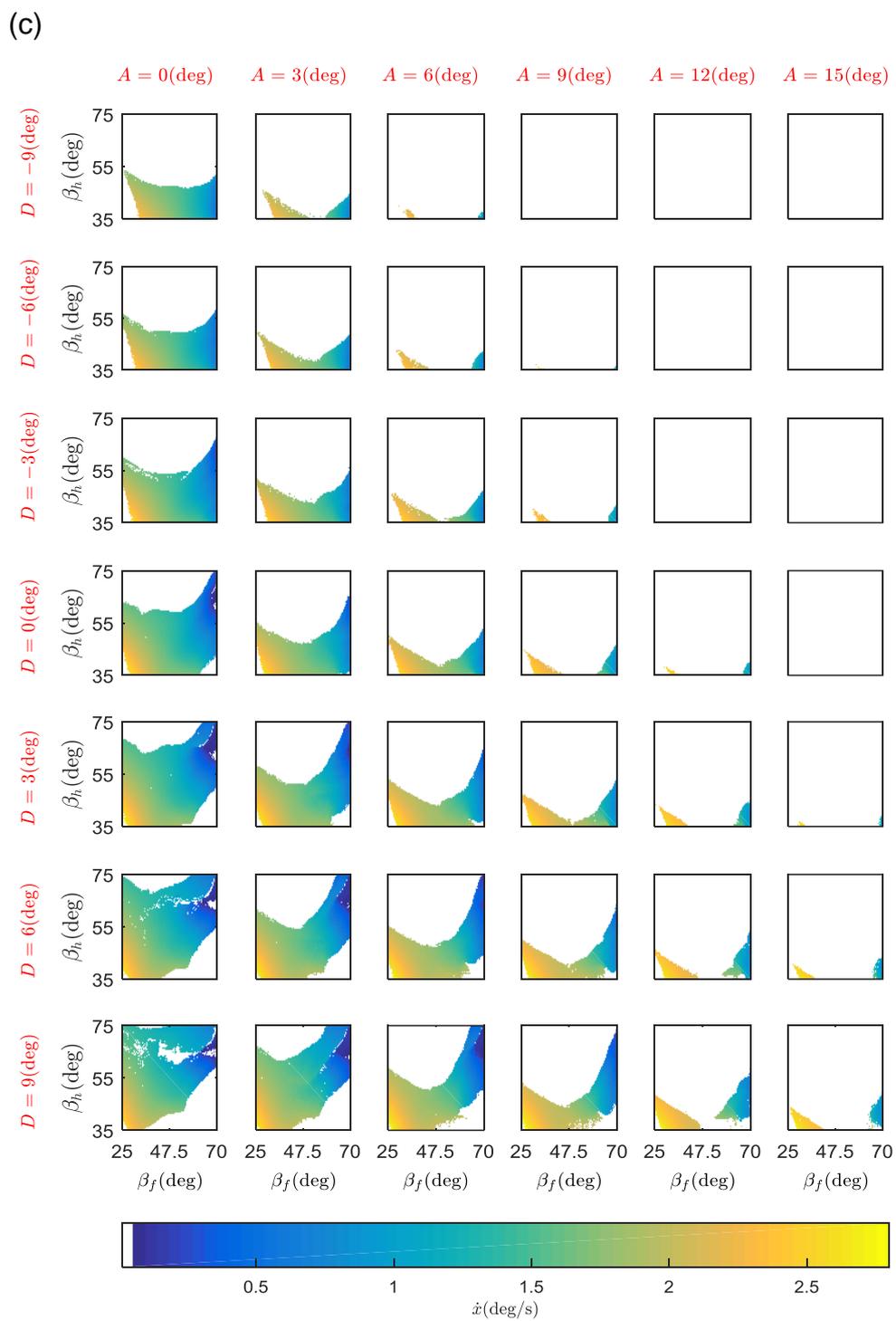


圖 3-8 pronk 步態 fixed points 分布(c) \dot{x}

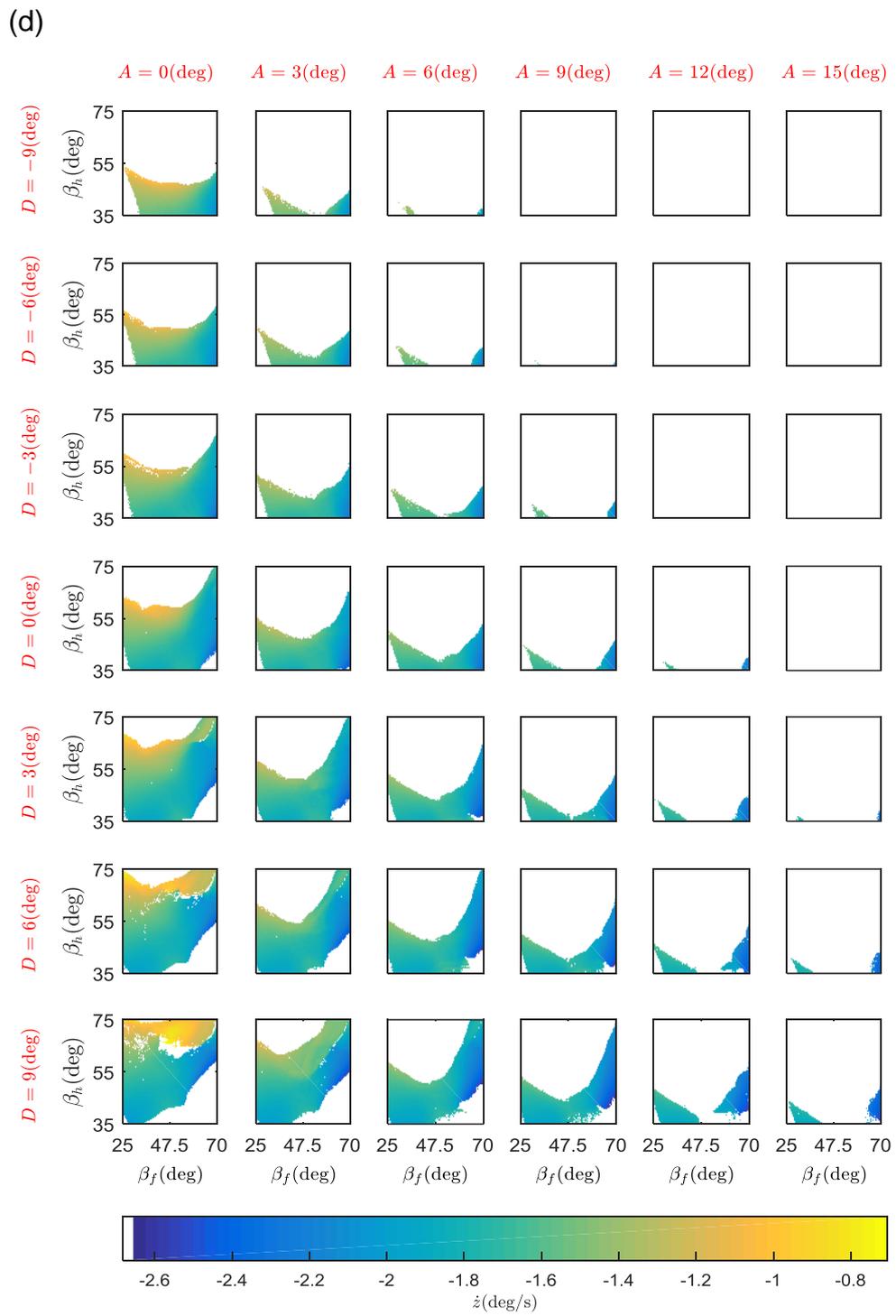


圖 3-8 pronk 步態 fixed points 分布(d)z

(e)

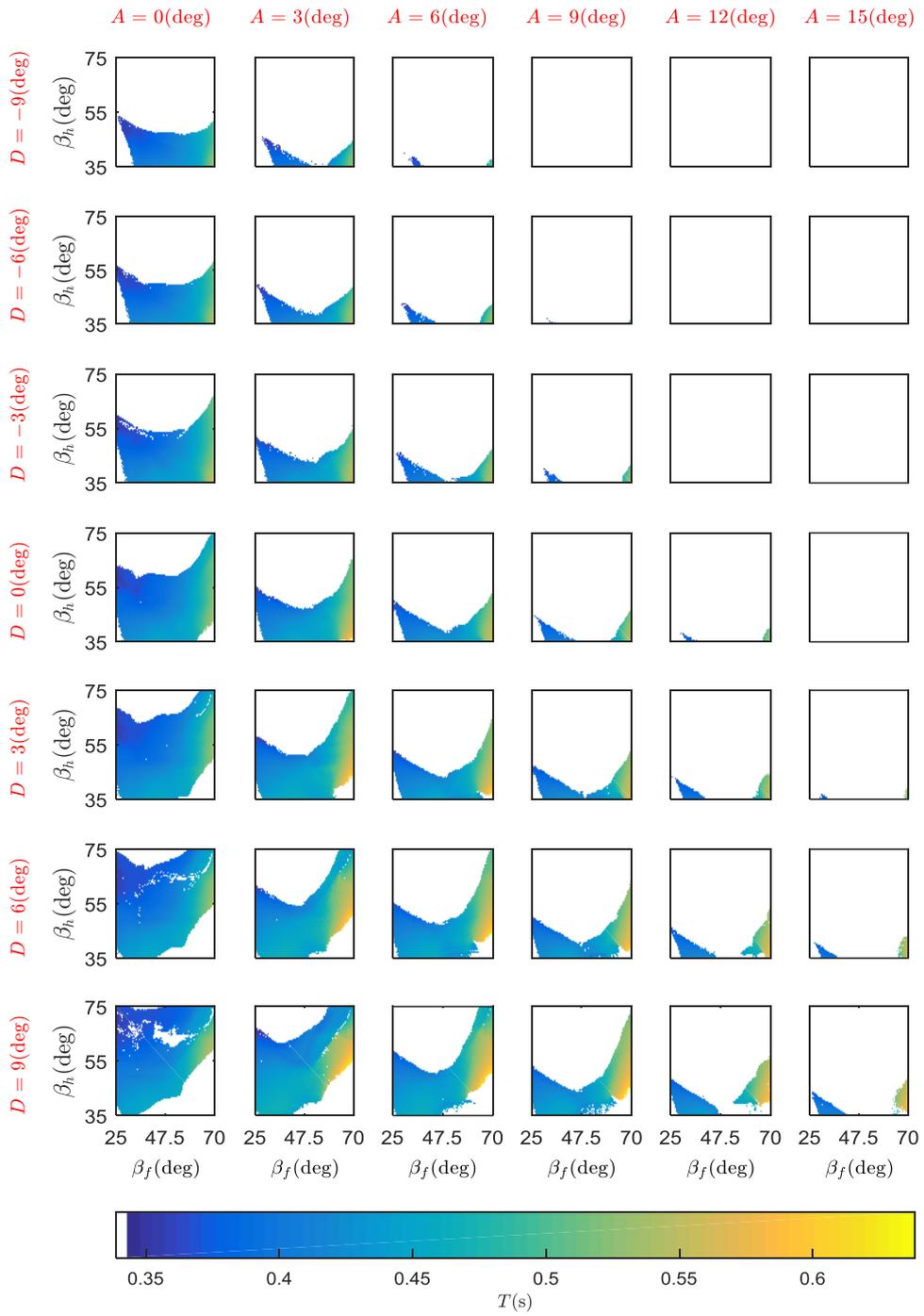


圖 3-8 pronk 步態 fixed points 分布(e) $T(=\frac{2\pi}{W})$

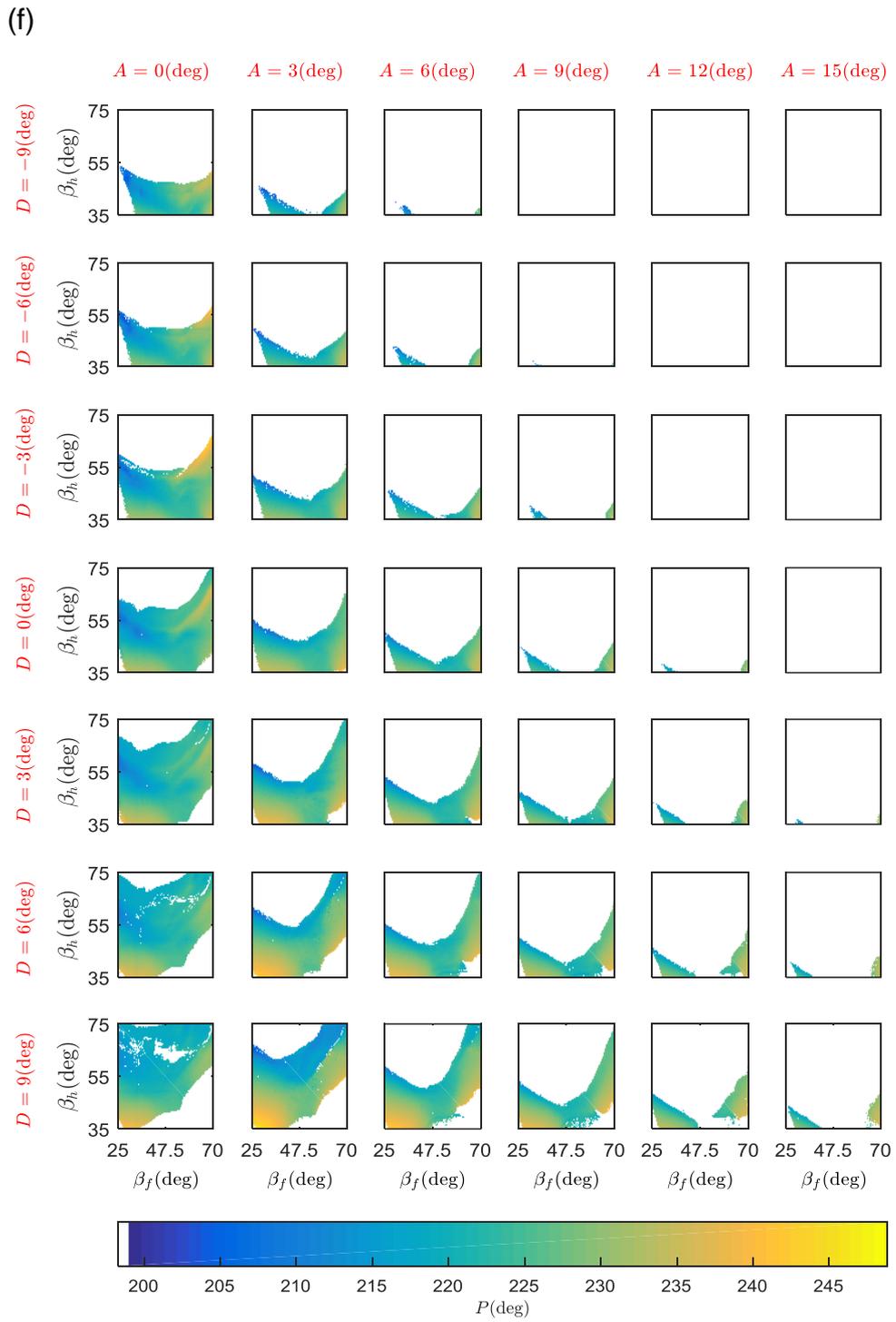


圖 3-8 pronk 步態 fixed points 分布(f)P

(g)

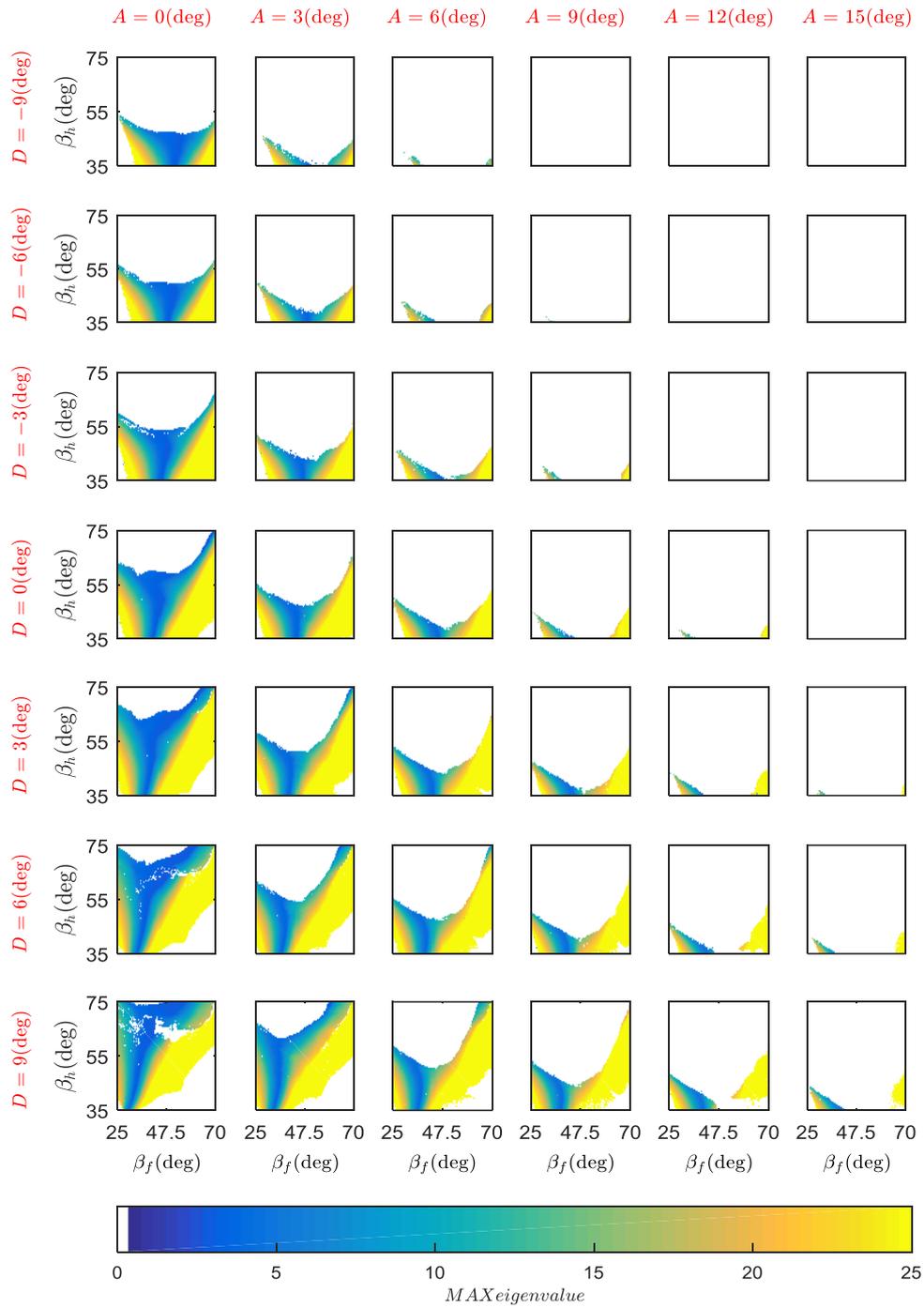


圖 3-8 pronk 步態 fixed points 分布(g)eigenvalue 最大值

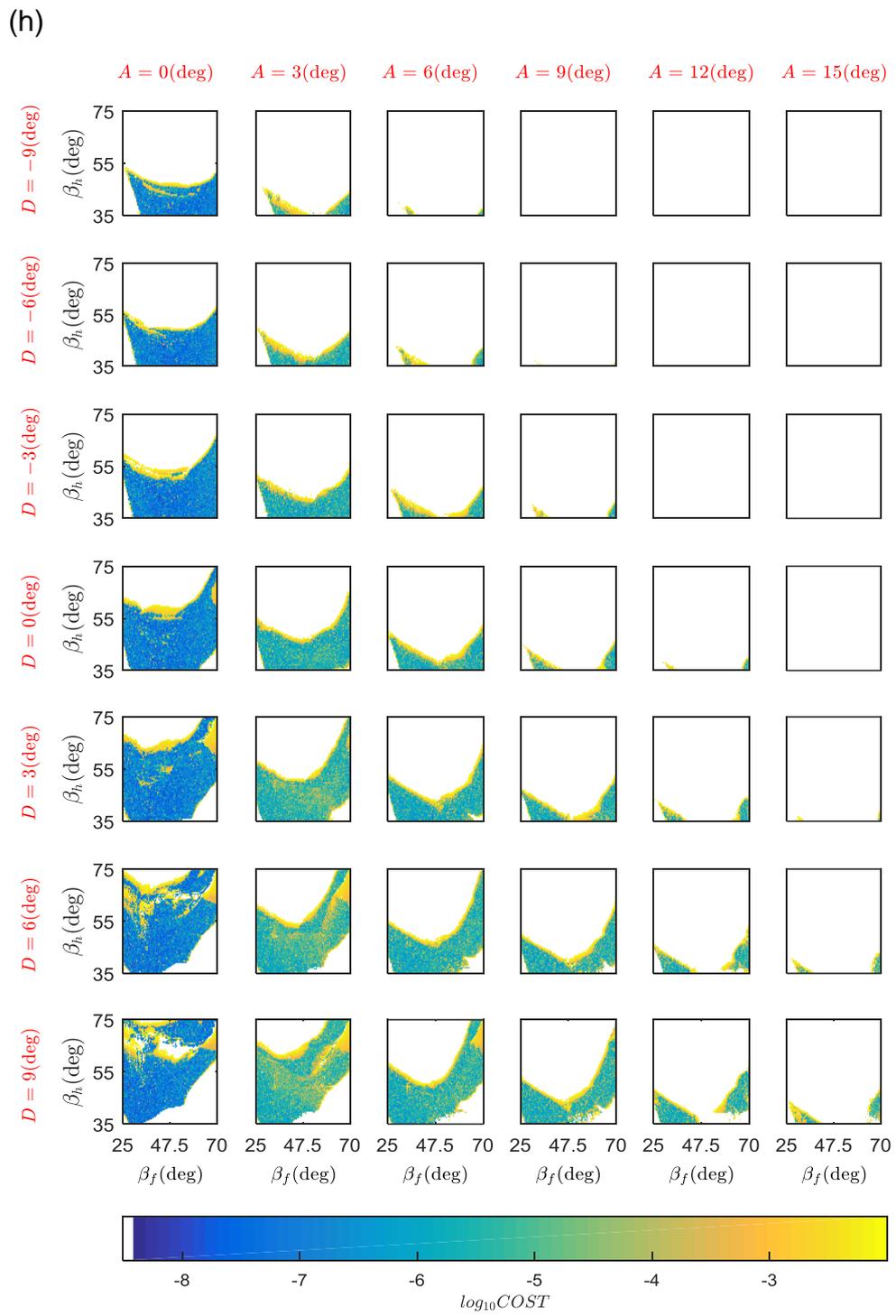


圖 3-8 pronk 步態 fixed points 分布(h) logCOST

- (a) ρ_b 的大小受 β_h 與 β_f 影響較多，當 β_h 與 β_f 越大 fixed point 的仰角 ρ_b 將逐漸變小，當 A 、 D 改變時 ρ_b 值的變化相對較不很明顯，
- (b) ρ_b 的大小在 pronk 步態中的變化範圍極小，圖中最大值約為 5(deg/s)、最小值約為 -35(deg/s)。由此可見 pronk 步態的在空階段需盡量保持身體平衡，這種現象應與其為單拍(one beat)的步態有關。前後腳在地階段集中於同一區將無法補償反轉過的的角速度，且在空中需遵守角動量守恆，若角速度過大會無法以正常角度落地。
- (c) 在 β_h 、 β_f 較小的地方，水平速度 \dot{x} 較高。此現象與動物奔跑的情形類似。在高速奔跑下需將腳往前抬來產生較大的水平分力，反過來說，當使用較小的落地角度 β 時，若沒有配合夠大的水平初速是無法成為穩定的步態。在 pronk 中， β_f 對水平速度的影響幅度比 β_h 來的大。
- (d) 垂直速度的大小同時隱含有軌跡飛行高度的訊息，當在空階段的高度越大，則有越多重力位能可轉換成垂直方向的動能。因此像 pronk 這類高度軌跡有明顯峰谷的步態，其落地時的垂直速率較大，大多位於 -1.7(m/s) 附近。 z 的分布趨勢較不明確，只有在步態區域邊界才有比較大的變化。
- (e) 圖(e)是將腰部角頻率 W 換算成週期 T ， β_f 越大會有較長的週期。觀察這類長週期的步態，其扭簧變形量都非常大，才能產生足夠的垂直衝量來增加飛行時間。在實際實驗時，塑膠腳此巨大變形下，可能會有塑性變形發生導致反作用力減小。腰部參數部分，較大的 D 會略為延長步態週期，而 A 的影響則不太一定會因 β_h 、 β_f 而有不同效應。
- (f) 在 pronk 中，相位的變化範圍約為 50(deg)，但它的趨勢較不規則，四個固定參數會交互影響。
- (g) 搜尋結果中，所有 fixed point 的最大特徵值皆大於 1。觀察圖中特徵值較小的區域大致集中在 $\beta_f = 40(deg)$ 附近，且當 β_h 增加時，藍色區域有變寬的趨勢，但其值仍比 1 大上許多。這代表 TRLW 模型的自然動態是沒有辦法產生自穩定的 pronk 步態。未來應設計控制器來降低特徵值大

小，藉此產生更為穩定的步態。

- (h) 圖中大部分的 fixed point 的代價函數都在 10^{-4} 以下，此計算誤差已經非常的小。 $A = 0$ 的直行中，因不需增加式 3-6 的補償項，平均代價函數可達 10^{-6} 以下。

由上述比較與圖 3-8 可看出在加入腰部擺動後，腰部的振幅 A 、偏移量 D 能改變 fixed points 的分布情形。腰部的主要效果是使垂直速率變大、週期變長，換句話說就是 pronk 每步跳的更高更遠。但在改變 A 、 D 的同時，卻也可能縮小了 fixed points 的範圍。圖 3-8 顯示在 A 大的模擬中，fixed points 的出現範圍變小了，尤其在 D 為負的地方幾乎是此 pronk 步態無法達到的區域。

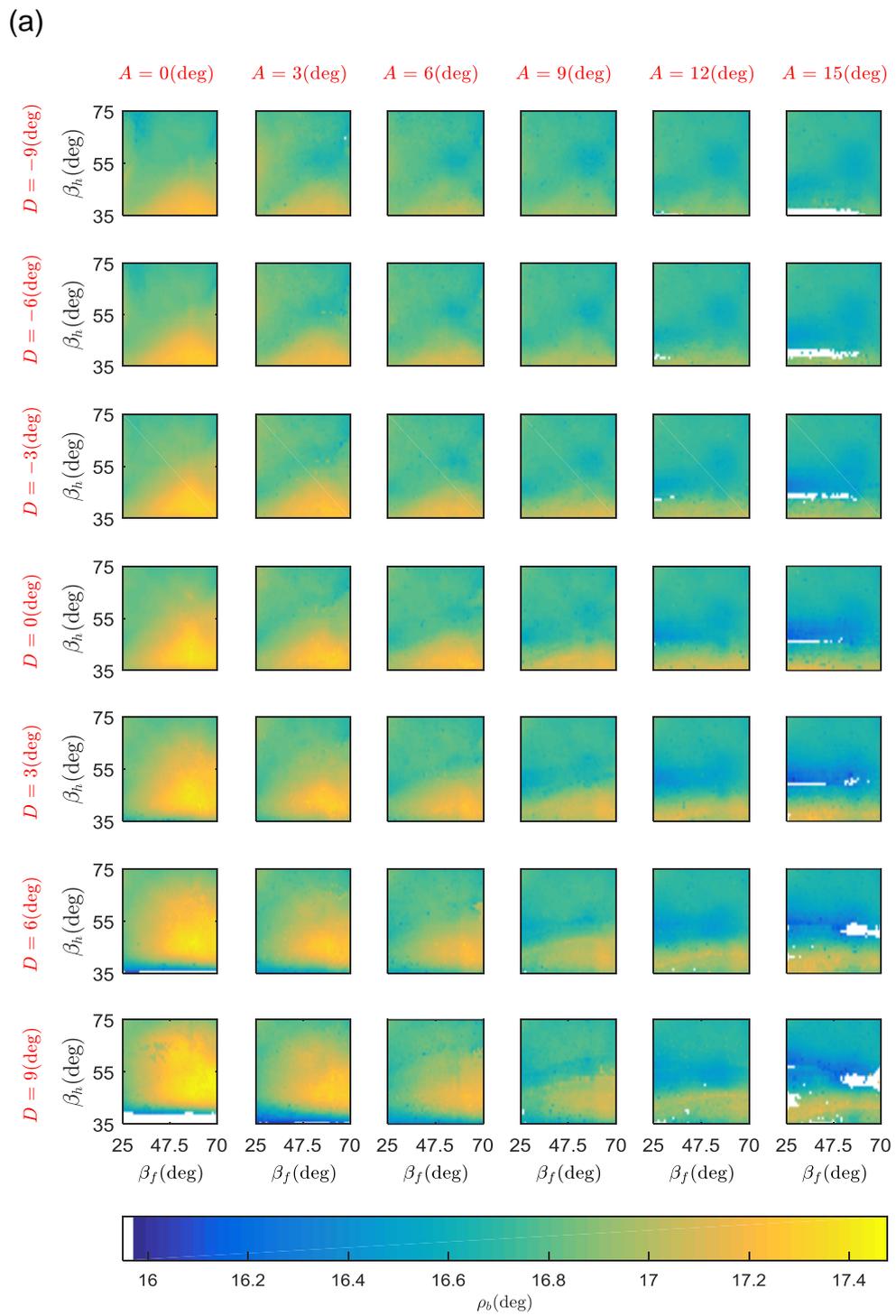


圖 3-9 bound 步態 fixed points 分布(a) ρ_b

(b)

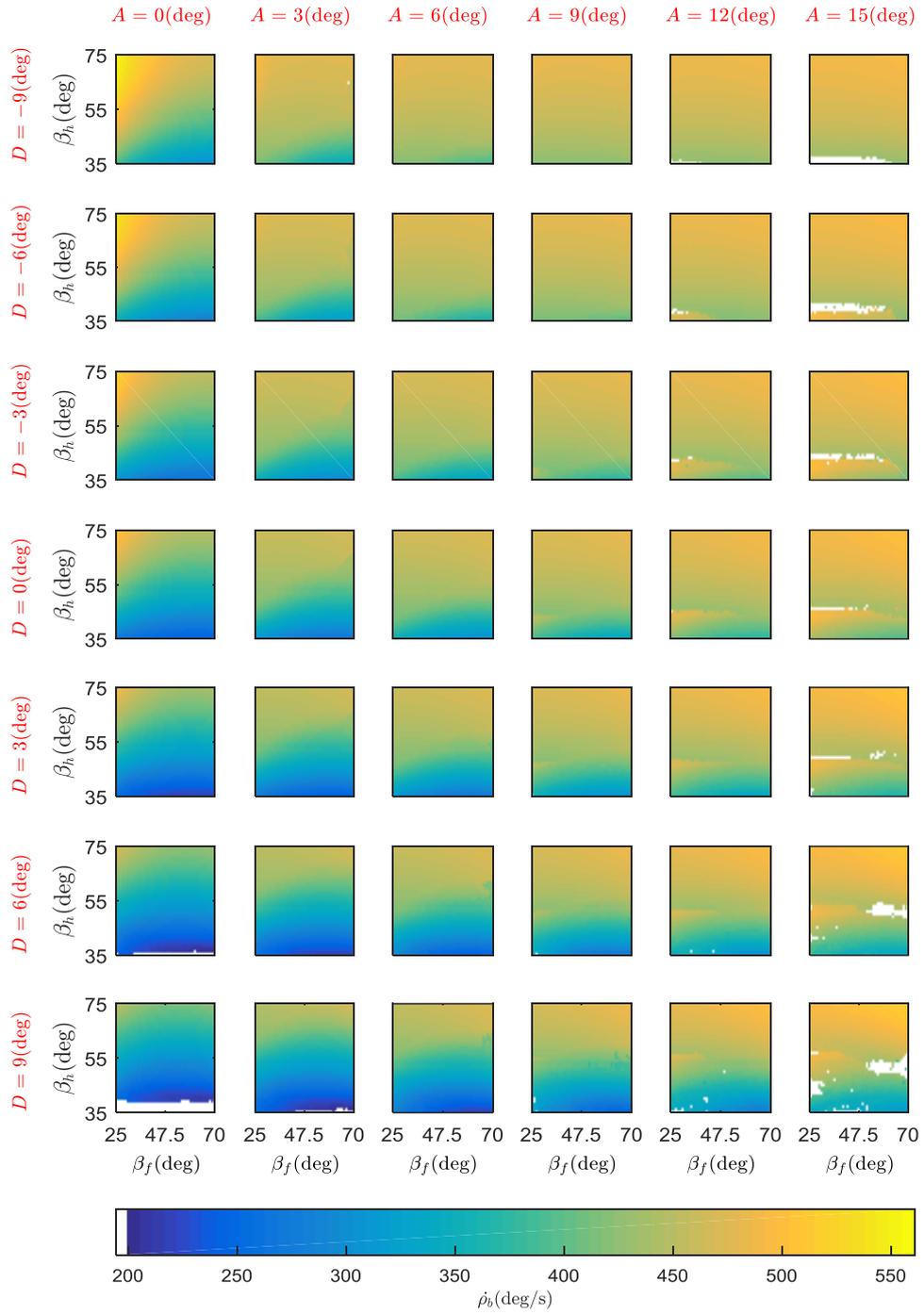


圖 3-9 bound 步態 fixed points 分布(b) $\dot{\rho}_b$

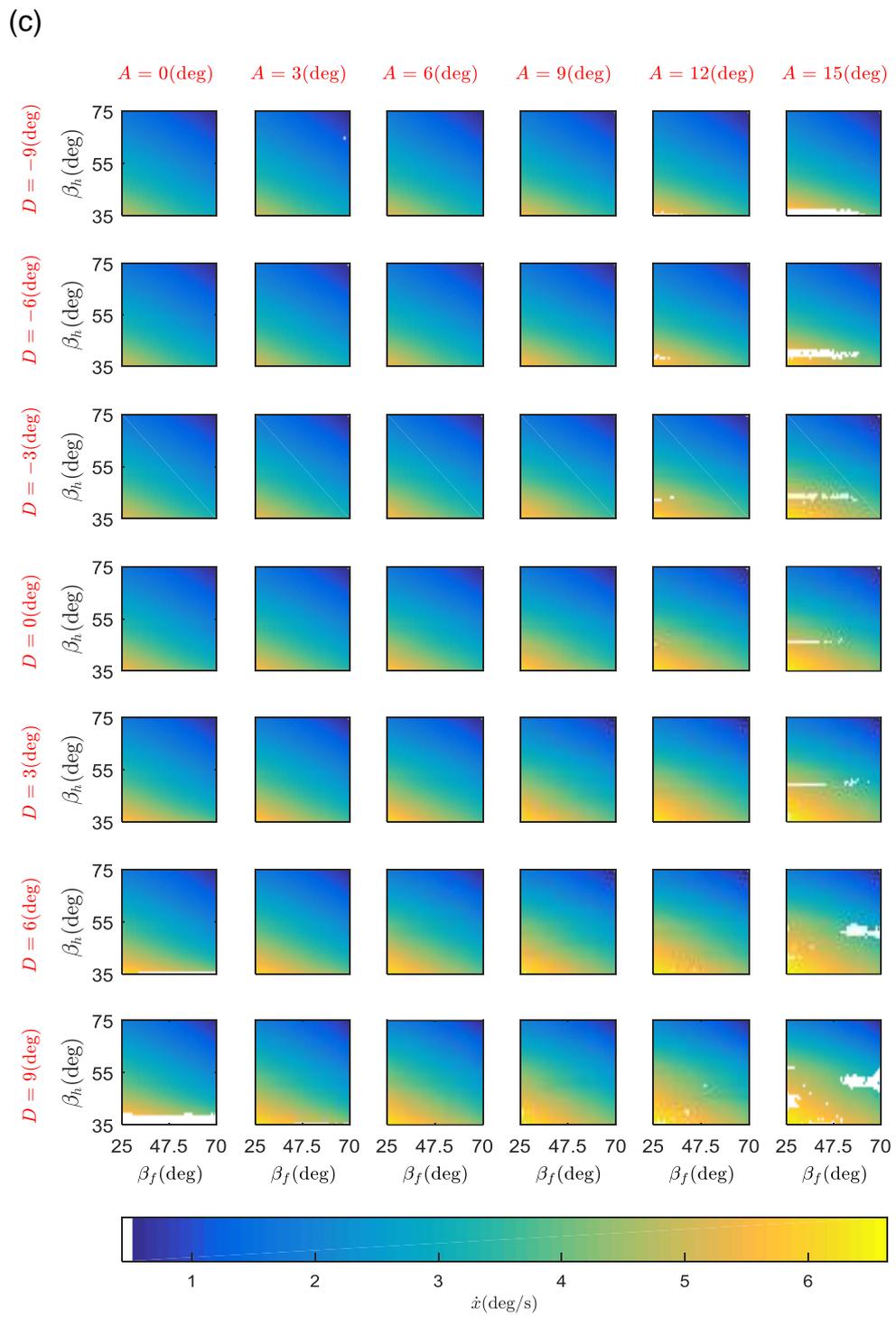


圖 3-9 bound 步態 fixed points 分布(c) \dot{x}

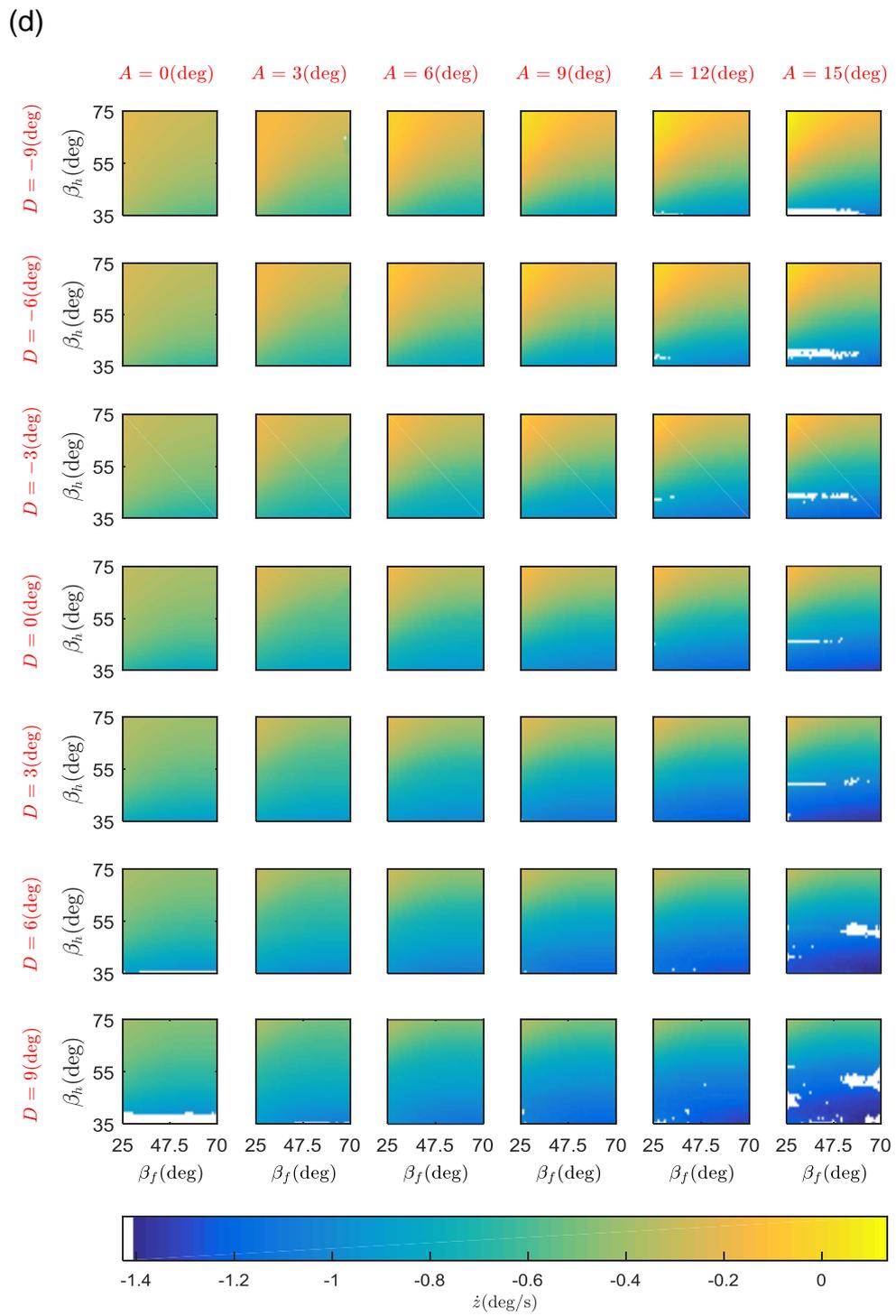


圖 3-9 bound 步態 fixed points 分布(d)z

(e)

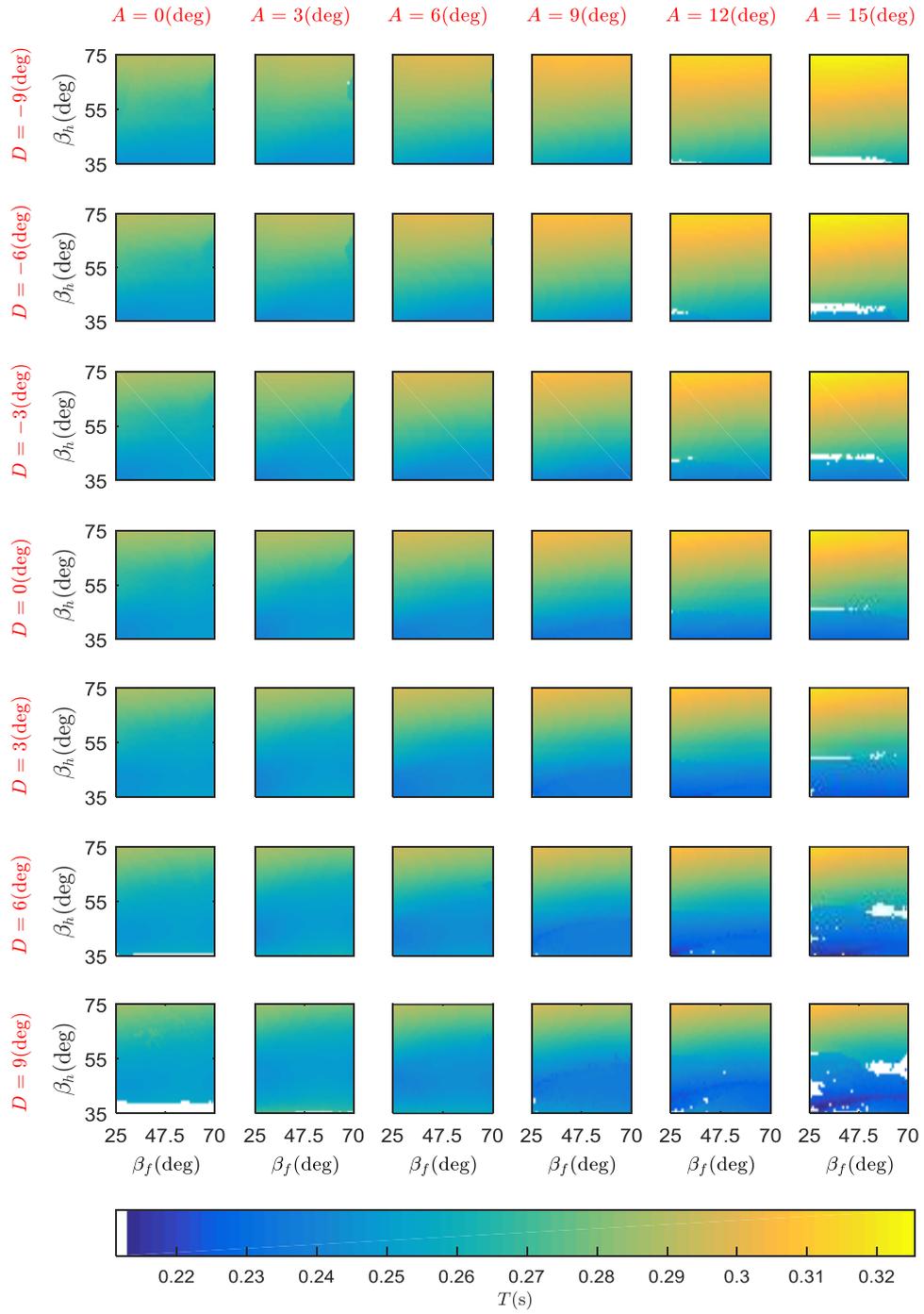


圖 3-9 bound 步態 fixed points 分布(e) $T(=\frac{2\pi}{W})$

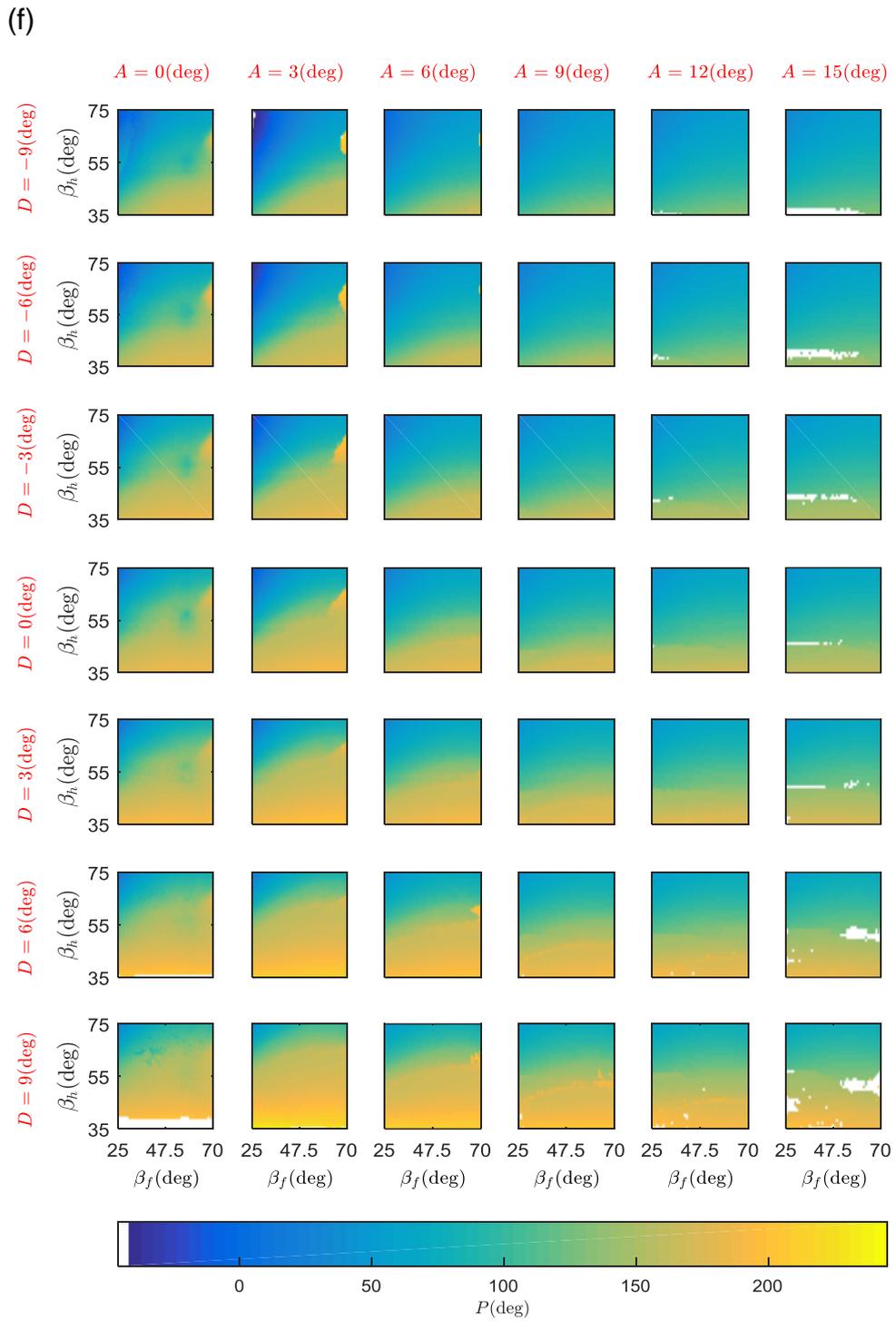


圖 3-9 bound 步態 fixed points 分布(f)P

(g)

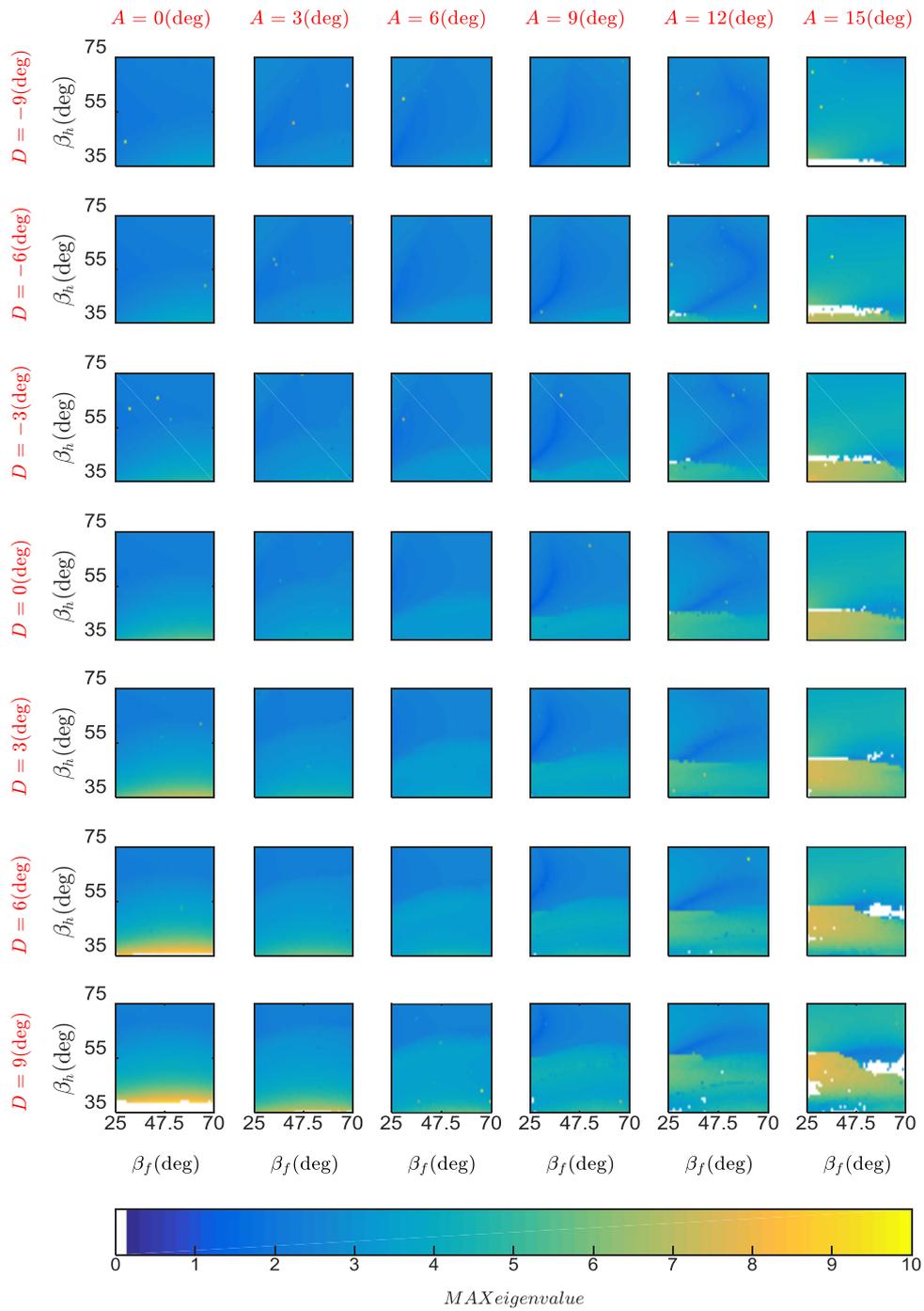


圖 3-9 bound 步態 fixed points 分布(g)eigenvalue 最大值

(h)

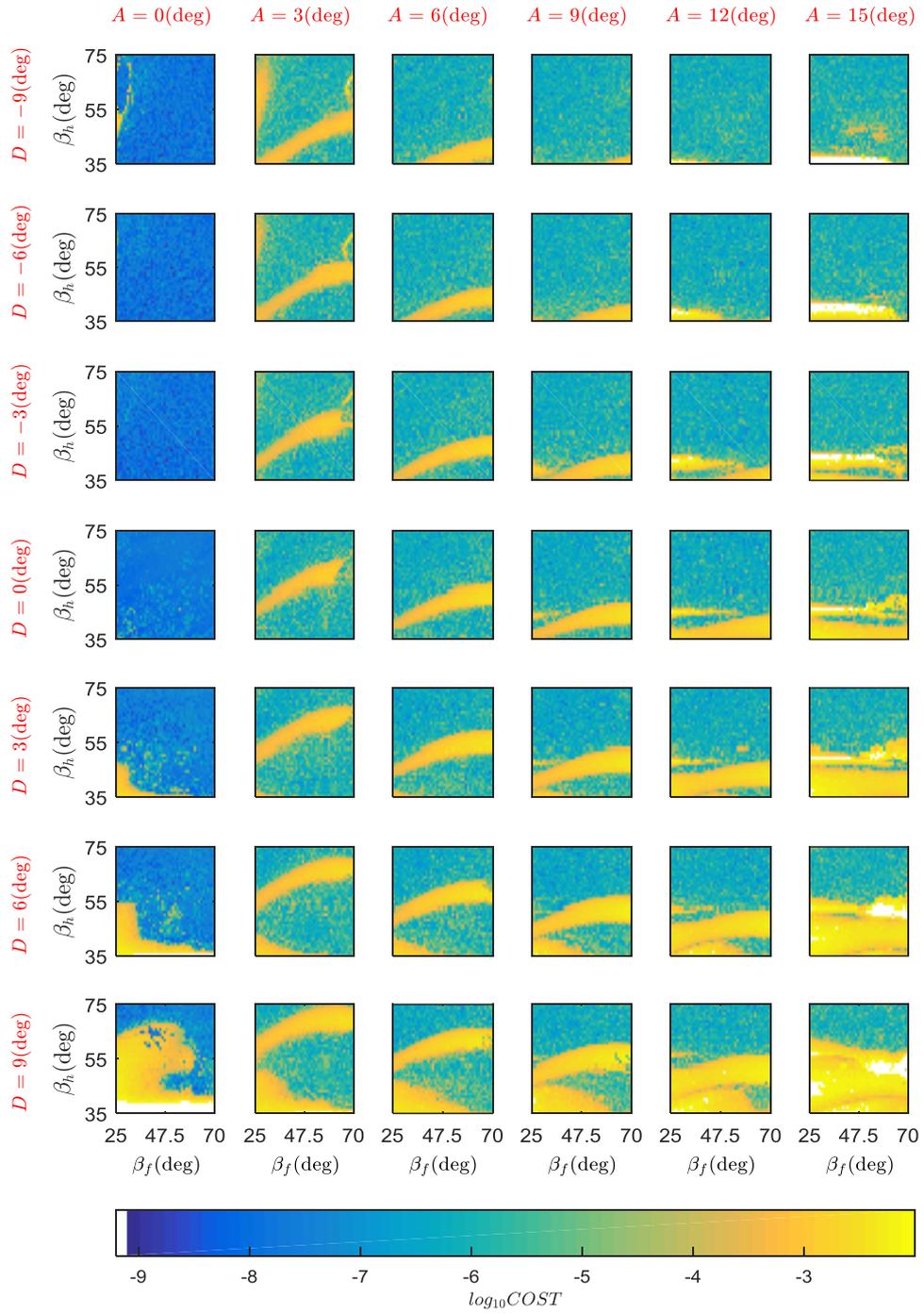


圖 3-9 bound 步態 fixed points 分布(h) logCOST

bound 步態之 fixed point

圖 3-9 中的空白處明顯較圖 3-8 少，可見 bound 步態的分布範圍較廣，即使加上腰部運動參數 A 、 D 的變化也不會有找不到 fixed point 的情形。不過在 A 較大的區域還是有出現最佳化提早收斂的問題，導致產生小區塊的空白處。關於初始狀態如何影響 fixed point 分布，以下將針對圖 3-9 的(a)~(h)個別探討：

- (a) 在 bound 步態中 ρ_b 的初始值變化並不大，大概分布於 16~17.5(deg)。相較 pronk 步態，bound 步態中變動 β_h 、 β_f 對 ρ_b 的影響小非常多。
- (b) 在 ρ_b 中，後腳落地角度的影響力相當顯著，當 β_h 角度減小時， ρ_b 會跟著減少。然而前腳的落地角度僅在 $A < 3$ 的範圍有一點效果，其餘區域 ρ_b 幾乎與 β_f 無關
- (c) 此處與 pronk 相同的是 β_h 、 β_f 越小則水平速度越大，但不同的是在 bound 中 β_h 的影響力是略大於 β_f 的。至於腰的部分，適當的條件(較大的 A 與 D)是能略為增加一點奔跑速度。
- (d) bound 步態相的機身高度軌跡較為平緩，因此落地的垂直速率較小，大多介於 0 到 -1.2(m/s)之間。
- (e) bound 的週期普遍小於 pronk 許多，當腰部振幅大時會使得 β_h 對週期的影響力上升，此時配上較大 β_h 會得到較長週期的 bound 步態。從模擬動畫中可看出腰身的巨幅擺動可增加施與地面的作用力，進而延長其在空時間。
- (f) 在 bound 中，相位的變化範圍很大，約為 250(deg)，它的趨勢受 β_h 影響較明顯。
- (g) bound 的特徵值仍然皆是大於 1，不過明顯小於 pronk 步態的特徵值。圖中特徵值最接近 1 的 fixed point 出現在 $\beta_h = 41(deg)$ 、 $\beta_f = 36(deg)$ 、 $A = 9(deg)$ 、 $D = -9(deg)$ ，已非常接近穩定範圍。由此可知在模擬中 bound 步態有較好的穩定性。

(h) 在此圖中出現許多代價函數較高的區域(黃色部分)。雖然代價函數的值突然驟升，但其仍小於 1%，不影響其為 fixed point 之結果。造成此現象的原因不明，猜測可能與最佳化的演算法有關。

綜合以上所述及圖 3-9 可知道腰部的作用(A 、 D)在適當的條件下能增加水平、垂直速率以及仰角角速度的變化幅度，並且達到更長週期的步態。這些現象說明了，增加腰部自由度的好處，確實能讓模擬中的奔跑步態有更廣泛的實現區域，產生更好的動態特性。

結論

本文章中介紹了四足動物的步態，並利用 TRLW 模型來模擬 pronk 與 bound 步態。為了瞭解各個初始條件對動態步態的影響，建立了一尋找高維度空間 fixed point 分布的方法。利用大量的數值模擬計算得出兩步態 fixed point 在此多維變數空間的分布狀態。觀察模擬結果可從中得到關於步態的特性，其中有些是符合動物運動的直覺，如落地角度與水平速度之對應關係。針對腰部結構的討論，在 pronk 中，調整腰部的偏移量 D 能略為增加在空階段的飛行高度，並且延長步態的週期；而在 bound 中，腰部運動能略為增加水平速度。關於此兩種步態軌跡之穩定性比較，bound 的特徵值較小(大於 1)，且 fixed point 分布範圍較廣，擁有較多動能(水平速度大)。綜合來說，模擬中的 bound 步態應比 pronk 步態更為穩定。