I. The Model

本計畫將運用 jump process 以及 發生 jump 的機率來建立 loss distribution，以下為建立 loss distribution 的模型。

1. 存活機率(Survival Probability)的設定

由下往上法的縮減式模型，一般設定公司從零到 t 時點的存活機率如下：

$$S(t)=e^{-\int_0^t h(\tau)d\tau} \tag{1}$$

$h(t)$ 為一個違約強度過程(Default Intensity 或 Hazard Rate Process)；值得注意的是，違約強度過程和存活機率過程提供相同的資訊。但是，從簡化評價 CDO 的目的來看，模型化存活機率的過程要比模型化違約強度過程簡單，因此本文從模型化存活機率的過程著手。

假設單一公司的存活機率受到兩個因子影響;一個是隨時間而變化的漂移項(Drift Term)，另一個則是受到總體經濟風險因子(即市場風險)影響的跳躍項(Jump Term)，故於 t 時點、市場在 0 到 t 之間總共發生 J 次跳躍的情況下，一家公司的累積存活機率為

$$S(J,t)=e^{\left[-\int_0^t \mu(\tau)d\tau-\sum_{j=1}^{J}H_j\right]} \tag{2}$$

令

$$X=\int_0^t \mu(\tau)d\tau+\sum_{j=1}^{J}H_j \tag{3}$$

假設在風險中立的機率測度下，X 會符合一個跳躍的隨機過程(Jump Process)，此跳躍的隨機過程之強度(Intensity)是 λ ，而跳躍的高度(Jump Size)是 H ，則

$$dX=\mu dt+dq \tag{4}$$

(4)式表示：在任何一個非常短的 Δt 時間內，有 $\lambda\Delta t$ 的機率 $dq=H$ ，另外有 $1-\lambda\Delta t$

的機率$dq=0$；再者，本文假設μ、λ只是時間的函數，而H則只是事件(或是jump)發生次數的函數。另外，值得注意的是本研究的評價模型允許：若事件(或是jump)發生，則會或可能同時導致多家公司倒閉。

2. 整個 CDO 信用貼水的計算

本計畫計算整個 CDO、以及 CDO 分券的信用貼水的方法與 Hull and White(2008)相同。假設sA是在所有給付日(Payment Dates)支付的所有固定貼水(Regular Payments)的現值總和；sB是在所有違約時點必須支付的所有應計貼水(Accrual Payments)的現值總和；而 C 是在所有違約時點所有預期的損失的現值總和，亦即是保護的賣方預期必須賠付金額的總現值；s 代表整個 CDO 或 CDO 分券每期的信用貼水。根據這些定義，利用預期貼水收入端(Premium Leg)的現值等於預期違約損失端(Contingent Leg)的現值的關係(即無套利機會關係式； No Arbitrage Condition)，則可以得到式(6)

$$sA+sB=C \tag{6}$$

令給付日為$t_1,t_2...t_m$，而且$t_0=0$，並且假設違約事件總是發生在兩個給付日的中點，而且假設整個 CDO 期初的名目本金為\$1的情況下，則整個 CDO 的預期現金流量如下：

$$A_{CDS}=\sum_{k=1}^{m}\left(t_k-t_{k-1}\right)E_{CDS}\left(t_k\right)v\left(t_k\right) \tag{7}$$

$$B_{CDS}=0.5\sum_{k=1}^{m}\left(t_k-t_{k-1}\right)\left[E_{CDS}\left(t_{k-1}\right)-E_{CDS}\left(t_k\right)\right]v\left(t_k^*\right) \tag{8}$$

$$C_{CDS}=\left(1-R\right)\sum_{k=1}^{m}\left[E_{CDS}\left(t_{k-1}\right)-E_{CDS}\left(t_k\right)\right]v\left(t_k^*\right) \tag{9}$$

$E_{CDS}\left(t\right)$為 t 時點整個 CDO 的期望本金(Expected Principal)，$v\left(t\right)$為 t 時點\$1 的現值，R為固定回收率(Fixed Recovery Rate)[1]，$t^*=0.5\times(t_{k-1}+t_k)$。

---

[1] 式(7--9)與下面式(12--14)的 t 時點之期望本金，分別用$E_{CDS}\left(t\right)\&E\left(t\right)$表示，這是因為計算整

由式(6--9)可知，欲求得整個 CDO 的信用貼水，需要計算每一期的期望本金 $E_{CDS}\left(t\right)$ (Expected Principal)。以下說明如何在式(2)存活機率的假設之下，計算各期的期望本金。

根據式(2)，若假設時間從零到 t 時點，市場發生 J 次跳躍的機率是 $P\left(J,t\right)$，則整個 CDO 的存活機率為

$$S_{CDS}\left(t\right)=\sum_{J}P\left(J,t\right)S\left(J,t\right) \tag{10}$$

在期初名目本金為$1 的情況之下，計算出整個 CDO 每一期的期望名目本金為

$$E_{CDS}\left(t\right)=S_{CDS}\left(t\right)*1=S_{CDS}\left(t\right) \tag{11}$$

根據式(11)得到的各期之名目本金，將之帶入(7)(8)(9)式，即可求得整個 CDO 的信用貼水。

3. CDO 批次證券信用貼水的計算

計算 CDO 批次證券信用貼水的方法與計算整個 CDO 的信用貼水一樣。先計算出各期的批次證券期望本金(Expected Tranche Principal)，然後根據無套利機會關係式，計算出 CDO 每個批次證券的信用貼水。假設給付日為 $t_1,t_2...t_m$，$t_0=0$，並且假設違約事件總是發生在兩個給付日的中點、以及如果 CDO 各個批次證券期初的名目本金為$1，則

$$A=\sum_{k=1}^{m}\left(t_k-t_{k-1}\right)E\left(t_k\right)v\left(t_k\right) \tag{12}$$

$$B=0.5\sum_{k=1}^{m}\left(t_k-t_{k-1}\right)\left[E\left(t_{k-1}\right)-E\left(t_k\right)\right]v\left(t_k^*\right) \tag{13}$$

個 CDO 的 t 時點之期望本金、以及計算 t 時點的批次證券的期望本金(Expected Tranche Principal)，算法雖類似，但仍有些微的差異，故本文將兩者分別用不同之符號表示。Hull and White (2008)並沒有做這種區別。

$$C=(1-R)\sum_{k=1}^{m}\left[E\left(t_{k-1}\right)-E\left(t_{k}\right)\right]v\left(t_{k}^{*}\right) \tag{14}$$

同理，欲求得批次證券的信用貼水，需要計算出各期的批次證券期望本金。

令 a_L 和 a_H 分別為批次證券的連結點(Attachment Point)和分離點(Detachment Point)，定義：

$$n_L=\frac{a_L N}{1-R}, n_H=\frac{a_H N}{1-R} \tag{15}$$

N 為整個投資組合的公司家數，R 為固定回收率。令大於 x 最小的整數為 $g\left(x\right)$，則對於一個期望名目本金為$1 的批次證券而言，在 t 時點有 n 家公司違約的批次證券本金為

$$W\left(n,t\right)=\begin{cases} 1 & \text{when } n<g\left(n_L\right) & n_L=\dfrac{a_L N}{1-R} \\ \dfrac{a_H-n\left(1-R\right)/N}{a_H-a_L} & \text{when } g\left(n_L\right)\le n<g\left(n_H\right) & n_H=\dfrac{a_H N}{1-R} \\ 0 & \text{when } n\ge g\left(n_H\right) & \end{cases} \tag{16}$$

有了式(15)、(16)，欲計算 CDO 各期的批次證券期望本金 $E\left(t\right)$，需要計算在時點 t、有 n 家公司違約、條件在有 J 次跳躍發生的機率 $\Phi\left(n,t\middle|J\right)$。計算 $\Phi\left(n,t\middle|J\right)$ 時，要用到一些假設：

(1) 假設投資組合內個別公司的倒帳機率是可預測的，而且彼此的個別倒帳機率是獨立的；
(2) 假設投資組合內公司具有齊一性(homogeneity)，因此個別公司的倒帳機率都一樣，而且公司倒帳後的資產回復率(recovery rate)也都一樣。
(3) 假設投資組合內個別公司的違約相關性，係透過總體經濟風險因子(Jumps)週期性的影響信用市場的倒帳環境，進而影響個別公司的倒帳機率而建立的。

根據這些假設，然後計算 $\Phi\left(n,t\middle|J\right)$。由於從零到 t 時點，市場發生 J 次跳躍的機

率是 $P(J,t)$，又於時點 t、從零到 t 總共有 J 次跳躍發生的單一公司存活機率為 $S(J,t)$，則可以計算出：在時點 t、有 n 家公司違約、條件在有 J 次跳躍發生的機率為：

$$\Phi(n,t|J)=b(n,N,1-S(J,t)) \tag{17}$$

b 為一個二項分配函數: $b(n,N,q)=\frac{N!}{n!(N-n)!}q^n(1-q)^{N-n}$ (18)

根據式(17)、(18)， CDO 批次證券在時點 t、條件在 J 次跳躍之下的期望本金，可以由式(16)(17)計算出：

$$E(t|J)=\sum_{n=0}^{N}\Phi(n,t|J)W(n,t) \tag{19}$$

根據式(19)，非條件式的 CDO 每一期批次證券期望本金可以求出如下：

$$E(t)=\sum_{J}P(J,t)E(t|J) \tag{20}$$

再將式(20)非條件式的 CDO 每一期批次證券期望本金帶入式(12)(13)(14)，即可求得 CDO 批次證券的信用貼水。

4. Jump 發生的機率與 Jump Size

本文將信用組合內個別公司的存活機率設定如同式(2)--(4)，而且以存活機率中的 $\sum_j H_j$ 描述信用市場所受到的衝擊(Shocks)，這些衝擊是造成每家公司間違約相關性的關鍵，所以這些衝擊發生的機率和衝擊的幅度大小就是考慮的重點。

Hull and White(2008)模型設定衝擊(即 Jumps)的發生是一個複合式 Poisson 隨機過程(Compound Poisson Process)，其違約強度(Jump Intensity) λ 是一個時間的函數，跳躍幅度(Jump Size)設為 H_j。因此，在零到 t 時點有 J 次 Jumps 發生的機率為：

$$P(J,t)=\frac{\left(\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)^J e^{-\left(\int_0^t \lambda(\tau)d\tau\right)}}{J!} \tag{21}$$

而跳躍幅度(Jump Size) H_j 為：

$$H_J = H_0 e^{\beta J} \tag{22}$$

是一個指數成長的函數 $O\left(e^n\right)$。Hull and White(2008)指出：設定成指數成長的跳躍幅度(Jump Size)才可以使 CDO 評價模型準確的配適(fitting)市場的報價，也可以表現出隨著經濟情況惡化，市場發生的衝擊會隨之急遽升高的情形。

II. Calibration and Applications of The Model

本節報告本計畫模型配適CDO市場價格資料、以及評價Forward CDO**s** and Options on CDO Tranches的數值結果。本文以iTraxx on January 30, 2007的市場價格資料(如Exhibit 1)為研究樣本[2]。

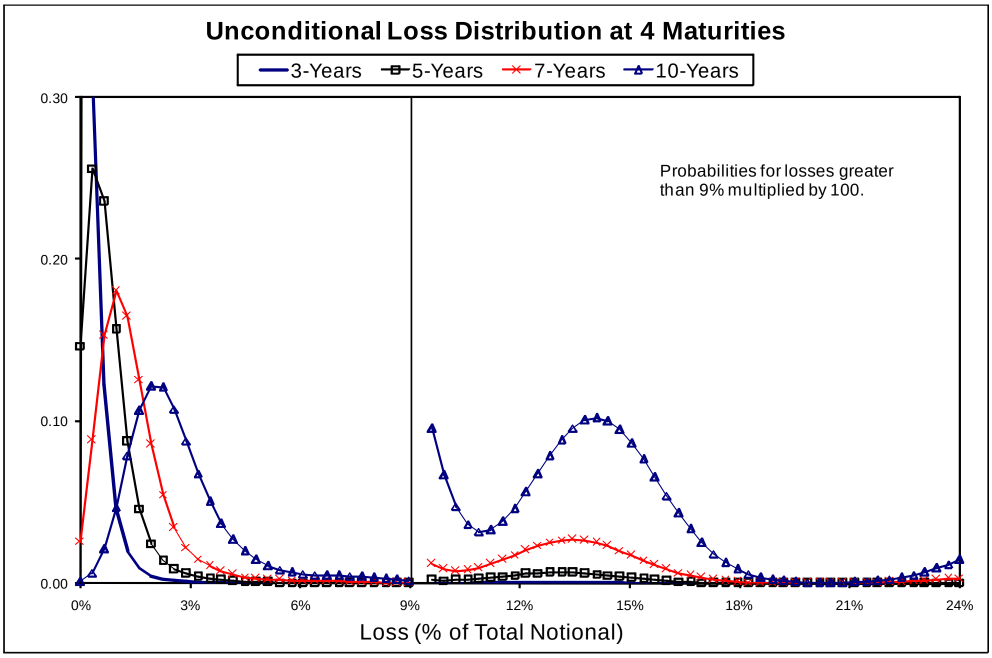
Exhibit 1、iTraxx CDO 批次證券 2007 年 1 月 30 日報價

a_L	a_H	3 年期	5 年期	7 年期	10 年期
0	0.03	n/a	10.25	24.25	39.30
0.03	0.06	n/a	42.00	106.00	316.00
0.06	0.09	n/a	12.00	31.50	82.00
0.09	0.12	n/a	5.50	14.50	38.25
0.12	0.22	n/a	2.00	5.00	13.75
Index		15.00	23.00	31.00	42.00

[2] Hull and White 亦提供 CDX NA IG on January 30, 2007 的市場價格資料，但因為其後續評價 Forward CDO**s** and Options on CDO Tranches 的數值結果只報告 iTraxx 相關者，故本文只用 iTraxx 的資料。

以圖一的 10 年期非條件式損失分配為例子來說明。當損失達 9%的本金時，其對應的機率約為 0.0010；當損失達 11%的本金時，其對應的機率約為 0.0003，反映較高損失的機率低於較低損失者，這很合理，因為較高損失的機率常理來說應較低。可是，當損失達 14%的本金時，其對應的機率卻又升高為 0.0010，顯示損失愈高時、機率愈高，這就不太合常理。之所以產生這種狀況，是因為損失分配之右尾呈現波浪狀，這造成高損失的機率高於低損失者，而且起起伏伏，這種損失分配不合理。

圖一、不同到期期限的非條件式損失分配圖[3]

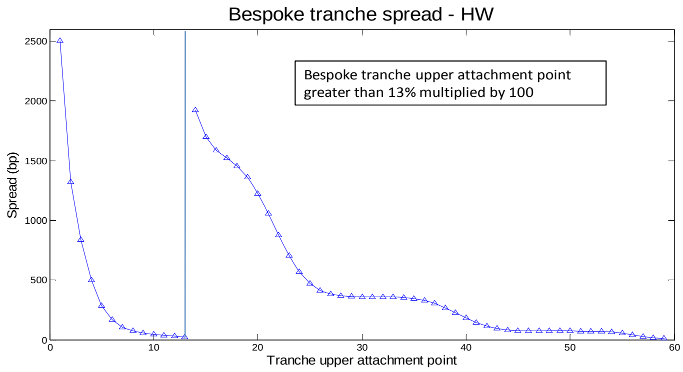


圖二是以 Hull & White (2008)十年期的 iTraxx Credit Portfolio 為例，將之分割成 100 等份的分券(i.e., 每一等份為 1%厚度之 tranche)，X-軸代表第 X%分券(i.e., (X-1)%--X%)，Y-軸表示第 X%分券的 spread。由圖二可知，從最底層的分券起(i.e., 0%--1%)，spread 是隨著分券往上而呈現單調遞減的，亦即愈底層的分券、spread 愈大，也就是說倒帳風險愈高的分券、spread 愈大，這種現象合理；但是，觀察圖二每 1%分券的 spread difference，則有不同的現象。

---

[3] 圖一的右半部是放大 100 倍的損失分配圖，也就是說為了更能觀察出右尾呈現波浪狀而放大 100 倍。因此，圖一右半部雖顯示 9%的本金損失對應 0.10 的機率，但其實機率應該是 0.0010，餘此類推。再者，此圖是摘錄自 Hull and White (2008)。另外，Hull and White (2008)繪製圖一的 Recovery Rate 是設定為 60%、而不是它們文中所說的 40%；但是，本文的圖二與圖三之 Recovery Rate 就都設定為 40%，所以讀者可以發現圖一與其它兩個圖的右半部放大的起始點不同，圖一是切在 9%，但圖二與圖三則切在約 13%。

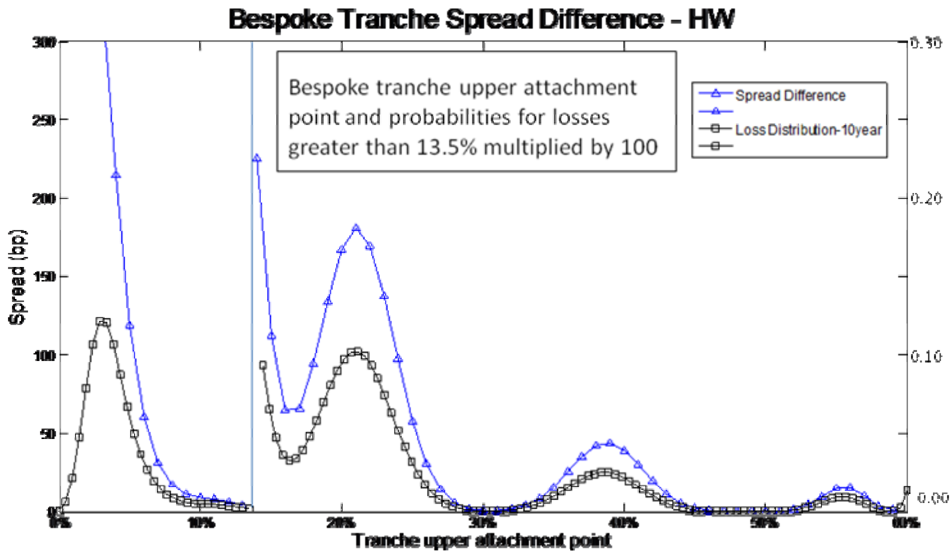
圖二、十年期 iTraxx Credit Portfolio 每 1%分券之 Spread [4]



圖三報告圖二每 1%分券的 spread difference、以及 iTraxx Credit Portfolio 的損失分配函數。X-軸代表第 X%分券(對應 Y-軸 LHS)、以及代表損失 X%本金(對應 Y-軸 RHS)，Y-軸(LHS)表示第 X%分券 spread 減第(X-1)%分券 spread 之 difference，Y-軸(RHS)表示損失 X%的本金之機率。由圖三可知，每 1%分券的 spread difference 從最底層(即 0%--1%分券)開始是正的、而且呈現遞減的現象。但是，到了第 18%分券(即 17%--18%)的 spread difference 反而升高，而且第 19%、20%、21%、22%分券的 spread difference 都一路攀升，直到第 23%分券的 spread difference 才又下降，使得每 1%分券的 spread difference 從第 18%分券起，呈現波浪狀。再者，圖三顯示 iTraxx Credit Portfolio 的損失分配函數右尾呈現的波浪狀，與每 1%分券的 spread difference 波浪狀一致，這指出損失分配右尾波浪狀的不合理現象，是肇因於每 1%分券的 spread difference 呈現波浪狀。可是，很難合理的解釋為何每 1%分券的 spread difference 不是從最底層(Equity tranche)單調的遞減？因此，有必要建構新模型使得每 1%分券的 spread difference 為正的、而且呈現單調遞減(由 Equity tranche 起)的合理現象。

[4] 圖二與圖三的數值例子和圖一相同，都是取自 Hull and White (2008)。

圖三、十年期 iTraxx Credit Portfolio 每 1%分券之 Spread Difference (LHS)、以及損失 X%本金之機率分配 (RHS)



本計畫將利用線性成長的跳躍 (linear growth jump)、以及跳躍的機率設定(jump probability modeling)捕捉信用組合內的違約相關性。將模型的跳躍設定為線性成長，數值分析顯示，不僅讓損失分配仍舊保有厚右尾的特徵，而且損失分配也呈現單調遞減的合理現象。再者，線性成長的跳躍幅度確實不及指數成長者，導致信用組合的相關性降低，不過本文的跳躍機率設定可以改善相關性降低的部分。

若能從一長時間市場資料中萃取每日模型參數的變動，可以檢驗模型的動態模擬能力以及預測能力。並且藉此評價選擇權以其 greek 參數的變動。