假設一任意軸對稱的固體粒子在牛頓流體中進行熱泳運動，而在皮克列數 (Peclet number) 很小的情況下，主導溫度分佈的能量方程式可以簡化成 Laplacian 的形式

$$\nabla^2 T = 0, \qquad \nabla^2 T_1 = 0. \tag{1}$$

方程式中的 T 及 T_1 分別是流體中及粒子內部的溫度。

在溫度的邊界條件方面，假設在粒子的表面處，法線方向的熱傳導連續，而流體與粒子的溫度不連續，其差值正比於法線方向的溫度梯度；又距離粒子很遠的流體溫度是線性分佈的，且在粒子內部的溫度是有限的值。上述的邊界可以表示為

$$\left.\begin{array}{l} k_1 \mathbf{n}\cdot\nabla T = k\mathbf{n}\cdot\nabla T_1 \\ T_1 - T = C_t l\mathbf{n}\cdot\nabla T \end{array}\right\} \quad \text{on } \mathrm{S_p} \tag{2a,b}$$

$$T_1\big|_{r=0} < \infty \tag{3}$$

$$T\big|_{r\to\infty} = T_0 + \mathbf{G}\cdot\mathbf{r} \tag{4}$$

在這裡 $\mathbf{n}$ 是在粒子表面的單位法線向量，l 是氣體分子的平均自由徑，C_t 是溫度躍遷係數，$\mathrm{S_p}$ 代表粒子表面的位置，而 T_0 及 $\mathbf{G}$ 描述線性分佈的溫度。

在流場方面，假設 Knudesen number 很小，Knudesen layer 很薄的情況，流體的速度及壓力分別以 $\mathbf{v}$ 及 p 表示，而在低雷諾數情況下的流體運動可以 Stokes equations 描述

$$\mu\nabla^2\mathbf{v} = \nabla p, \qquad \nabla\cdot\mathbf{v} = 0. \tag{5}$$

假設粒子熱泳速度為 $\mathbf{U}$ 而且以角速度 $\mathbf{\Omega}$ 轉動、氣-固表面流體速度有熱滑移及摩擦滑移，因此在粒子表面的流體速度邊界條件可表示為

$$\mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{\Omega}\times\mathbf{r} + \frac{C_m l}{\mu}\mathbf{P}_\tau(\mathbf{v}) + \frac{C_s\mu}{\rho T_0}\nabla_s T, \quad \text{on } \mathrm{S_p}. \tag{6}$$

而且流體在無窮遠處是靜止的

$$\mathbf{v}\big|_{r\to\infty} = 0 \tag{7}$$

方程式(11)中，C_s 是熱滑移係數定義於方程式(2)中，C_m 是摩擦滑移係數，而粒子表面切線方向的溫度梯度 $\nabla_s T = \nabla T - (\nabla T\cdot\mathbf{n})\mathbf{n}$。另外，作用於粒子表面切線方向的張力向量為

$$\mathbf{P}_\tau(\mathbf{v}) = \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n} - [\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\cdot\mathbf{n}]\mathbf{n} \tag{8}$$

在這個式子中，$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})$ 是張力的張量。

利用上述的溫度主導方程式(1)及溫度的邊界條件(2)-(4)後，我們就可以得到粒子周圍及內部的溫度分佈，接下來利用速度的主導方程式(4)及邊界條件(6)和(7)，連同已經解出來的溫度分佈，解出流體的速度分佈及粒子熱泳速度 U。以下分別介紹些微變形球體的熱泳速度以及周圍流場及溫度場之求解。

些微變形球體的熱泳—對形變變數ε展開至一次及二次

現在有一偏離球形不遠的粒子在有一均勻的溫度梯度下流體中進行熱泳運動。這個粒子的表面S_p在球座標 (r,θ,z)下可以表示成

$$r = a[1+\varepsilon f_1(\theta,\phi)+\varepsilon^2 f_2(\theta,\phi)+...], \tag{9}$$

裡面的ε是表示形變程度的無因次的參數，由於只考慮些微形變的情況，因此其值遠比 1 還小，此時ε的高次項可以忽略，而 f_1 及 f_2 是只與角度相關的函數而與ε無關。

利用方程式(9) 我們可以求得垂直於粒子表面的單位向量$\mathbf{n}$並依ε次方數整理

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}_0 + \varepsilon\mathbf{n}_1 + \varepsilon^2\mathbf{n}_2 + ..., \tag{10}$$

令滿足溫度主導方程式(1)的粒子周圍溫度T及內部溫度T_1為

$$T = T_\infty + \Theta, \qquad T_1 = T_\infty + \Lambda, \tag{11}$$

在這裡T_∞是不受擾動的溫度分佈，即方程式(4) ，而Θ及Λ滿足 Laplace equation，是 solid spherical harmonics 的和

$$\Theta = \sum_n \Theta_n, \qquad \Lambda = \sum_n \Lambda_n \tag{12}$$

將方程式(15) 代入邊界條件(6)-(8) ，得到

$$\left.\begin{array}{l} k^*\mathbf{n}\cdot(\nabla\Lambda+\mathbf{G}) = \mathbf{n}\cdot(\nabla\Theta+\mathbf{G}) \\ \Theta-\Lambda = C_\mathrm{t}^* a\mathbf{n}\cdot(\nabla\Theta+\mathbf{G}) \end{array}\right\}, \quad \text{on } \mathrm{S}_\mathrm{p}. \tag{13a,b}$$

$$\Lambda\big|_{r=0} < \infty, \tag{14}$$

$$(\Theta/r)\big|_{r\to\infty} \to 0. \tag{15}$$

其中$k^* = k_1/k$，$C_\mathrm{t}^* = C_\mathrm{t} l/a$.

若將溫度場對ε展開可以用下面的式子表示

$$\Theta = \Theta^{(0)} + \varepsilon\Theta^{(1)} + \varepsilon^2\Theta^{(2)} + \dots, \qquad \Lambda = \Lambda^{(0)} + \varepsilon\Theta^{(1)} + \varepsilon^2\Theta^{(2)} \dots \tag{16}$$

明顯地，$\Theta^{(i)}$及$\Lambda^{(i)}$都滿足 Laplace equation 及方程式(16)，這裡$i = 0$，1 或 2。

假設ε^0，ε^1，ε^2彼此線性獨立，將方程式(10)，(11)及(16)代入邊界條件(13)後，並依照ε的冪次不同整理成三組邊界條件

$$\mathbf{r}\cdot\nabla(k^*\Lambda^{(0)} - \Theta^{(0)})\Big|_{r=a} = \mathbf{S}_0(\mathbf{G})\Big|_{r=a}, \tag{17a}$$

$$(\Theta^{(0)} - \Lambda^{(0)} - C_\mathrm{t}^* a\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\nabla\Theta^{(0)})\Big|_{r=a} = \mathbf{Q}_0(\mathbf{G})\Big|_{r=a}, \tag{17b}$$

$$\mathbf{r}\cdot\nabla(k^*\Lambda^{(1)} - \Theta^{(1)})\Big|_{r=a} = \mathbf{S}_1(\Lambda^{(0)}, \Theta^{(0)}, \theta, \phi)\Big|_{r=a}, \tag{18a}$$

$$(\Theta^{(1)} - \Lambda^{(1)} - C_\mathrm{t}^* a\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\nabla\Theta^{(1)})\Big|_{r=a} = \mathbf{Q}_1(\Lambda^{(0)}, \Theta^{(0)}, \theta, \phi), \tag{18b}$$

$$\mathbf{r}\cdot\nabla(k^*\Lambda^{(2)} - \Theta^{(2)})\Big|_{r=a} = \mathbf{S}_2(\Lambda^{(0)}, \Theta^{(0)}, \Lambda^{(1)}, \Theta^{(1)}, \theta, \phi)\Big|_{r=a}, \tag{19a}$$

$$(\Theta^{(2)} - \Lambda^{(2)} - C_\mathrm{t}^* a\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\nabla\Theta^{(2)})\Big|_{r=a}$$
$$= \mathbf{Q}_2(\Lambda^{(0)}, \Theta^{(0)}, \Lambda^{(1)}, \Theta^{(1)}, \theta, \phi)\Big|_{r=a}. \tag{19b}$$

在這裡$\mathbf{S}_i$，$\mathbf{Q}_i$，其中$i = 0$，1 或 2，是整理出來的函數，除了方程式右式已經列出的變數以外，$\mathbf{S}_i$，$\mathbf{Q}_i$也是k^*及C_t^*的函數。從上面的式子來看，裡面的r不是代入粒子表面的值，即方程式(9) ，而是代入a，這是因為可以將r對$r = a$展開。

現在邊界條件(17)的右式都是已知的，因此可以解$\Theta^{(0)}$及$\Lambda^{(0)}$。然而在這之前，我們利用了Θ及Λ是 spherical harmonics 的性質，因此，邊界條件(17)-(19)也可以表示為

$$\mathbf{r}\cdot\nabla(k^*\Lambda^{(i)} - \Theta^{(i)})\Big|_{r=a} = \sum_n L_n^{(i)}(\theta, \phi), \tag{20a}$$

$$(\Theta^{(i)} - \Lambda^{(i)} - C_\mathrm{t}^* a\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\nabla\Theta^{(i)})\Big|_{r=a} = \sum_n N_n^{(i)}(\theta, \phi), \tag{20b}$$

這裡i可以是 0，1 或 2。由方程式(12)，(20)，以及 spherical harmonics 的性質，我們可以將$\Lambda_n^{(i)}$，$\Theta_n^{(i)}$以下式表示

$$\Theta_n^{(i)} = R_1(n, L_n^{(i)}, N_n^{(i)}, k^*, C_{\mathrm{t}}^*, r), \tag{21a}$$

$$\Lambda_n^{(i)} = R_2(n, L_n^{(i)}, N_n^{(i)}, k^*, C_{\mathrm{t}}^*, r). \tag{21b}$$

因此，結合邊界條件(17)及(20)，我們可以得到$L_n^{(0)}$及$N_n^{(0)}$，進而由方程式(21)得到$\Lambda_n^{(0)}$，$\Theta_n^{(0)}$，此時，代回方程式(11)及(16)，就知道溫度場展開到ε零次的結果，即球形粒子的溫度分佈。有了$\Lambda_n^{(0)}$，$\Theta_n^{(0)}$，邊界條件(18)的右式就可求得，因此可得到$L_n^{(1)}$及$N_n^{(1)}$，再利用方程式(24)得到$\Lambda_n^{(1)}$，$\Theta_n^{(1)}$，此時可以得到溫度場展開到ε一次的結果。同理，我們最後也可以得到$\Lambda_n^{(2)}$，$\Theta_n^{(2)}$，也就得到了溫度場展開到ε二次的結果。

在得到了溫度分佈以後，就可以求速度分佈。從速度的主導方程式(5)，也就是 Stokes equations，速度的通解可以表示為

$$\mathbf{v} = \sum_n [\nabla\varphi_n + \nabla\times(r\chi_n) + \frac{n+3}{2\mu(n+1)(2n+3)} r^2 \nabla p_n]. \tag{22}$$

在這裡，φ_n，χ_n，p_n是 n 次的 solid spherical harmonics，當速度$\mathbf{v}$對ε展開時，φ_n，χ_n，p_n，以及$\mathbf{v}$的函數$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})$(在方程式(8)中) 也對應展開，此外，熱泳速度$\mathbf{U}$及角速度$\boldsymbol{\Omega}$也對$\varepsilon$展開，結果都可用方程式(16)表示，只是裡面的函數換成$\mathbf{v}$，φ_n，χ_n，p_n，$\boldsymbol{\sigma}$， $\mathbf{U}$或$\boldsymbol{\Omega}$。相同的，我們將速度的邊界條件(6)對ε展開後整理出式子

$$(\mathbf{v}^{(0)} - \frac{C_{\mathrm{m}}^* a}{\mu}\mathbf{P}_{\tau 0})\Big|_{r=a} = \mathbf{B}_0(\mathbf{U}^{(0)}, \boldsymbol{\Omega}^{(0)}, \Theta^{(0)})\Big|_{r=a}, \tag{23}$$

$$(\mathbf{v}^{(1)} - \frac{C_{\mathrm{m}}^* a}{\mu}\mathbf{P}_{\tau 1})\Big|_{r=a} = \mathbf{B}_1(\mathbf{U}^{(1)}, \boldsymbol{\Omega}^{(1)}, \mathbf{v}^{(0)}, \Theta^{(0)}, \Theta^{(1)}, f_1)\Big|_{r=a}, \tag{24}$$

$$(\mathbf{v}^{(2)} - \frac{C_{\mathrm{m}}^* a}{\mu}\mathbf{P}_{\tau 2})\Big|_{r=a} = \mathbf{B}_2(\mathbf{U}^{(2)}, \boldsymbol{\Omega}^{(2)}, \mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}^{(1)}, \Theta^{(0)}, \Theta^{(1)}, \Theta^{(2)}, f_1, f_2)\Big|_{r=a}. \tag{25}$$

在這裡$C_{\mathrm{m}}^* = C_{\mathrm{m}} l / a$，$\mathbf{P}_{\tau i} = \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n}_0 - (\mathbf{n}_0 \cdot \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \mathbf{n}_0)\mathbf{n}_0$，$B_i$是整理出來的函數，而$i = 0$，

1 或 2。

如果令方程式(23)-(25)的左式為 $\mathbf{A}$，即 $\mathbf{A}=\mathbf{v}-(C_{\mathrm{m}}^{*}a/\mu)\mathbf{P}_{\tau}$，則根據 spherical harmonics function 的性質可以得到

$$\frac{1}{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{A})\Big|_{r=a}=\sum_{n}X_{n}(\theta,\phi), \tag{26}$$

$$\left[(\mathbf{r}\cdot\nabla)\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{A}}{r}-r\nabla\cdot\mathbf{A}\right]\Bigg|_{r=a}=\sum_{n}Y_{n}(\theta,\phi), \tag{27}$$

$$[\mathbf{r}\cdot(\nabla\times\mathbf{A})]\big|_{r=a}=\sum_{n}Z_{n}(\theta,\phi). \tag{28}$$

將方程式(8)，(22)代入(26)-(28)得到下列關係式

$$\varphi_{n}^{(i)}=T_{1}(n,X_{n}^{(i)},Y_{n}^{(i)},C_{\mathrm{m}}^{*},r), \tag{29}$$

$$p_{n}^{(i)}=T_{2}(n,X_{n}^{(i)},Y_{n}^{(i)},C_{\mathrm{m}}^{*},r), \tag{30}$$

$$\chi_{n}^{(i)}=T_{3}(n,Z_{n}^{(i)},C_{\mathrm{m}}^{*},r). \tag{31}$$

現在，用類似之前解溫度分佈的步驟，利用方程式(22)-(31)，就可以分別解出 $\mathbf{v}^{(0)}$，$\mathbf{v}^{(1)}$，$\mathbf{v}^{(2)}$，也就得到了流體的速度分佈。

又已知粒子受到流體的 drag force 及力矩(torque) 為

$$\mathbf{F}=-4\pi\nabla(r^{3}p_{-2}),\qquad \mathbf{T}=-8\pi\mu\nabla(r^{3}\chi_{-2}). \tag{32}$$

而 $\mathbf{F}$ 及 $\mathbf{T}$ 也可以對 ε 展開得到類似方程式(16)的形式。

現在，假設粒子自由懸浮於流體之中，則所受之 drag force 及力矩為零，因此

$$\mathbf{F}^{(i)}=-4\pi\nabla(r^{3}p_{-2}^{(i)})=0,\qquad \mathbf{T}^{(i)}=-8\pi\mu\nabla(r^{3}\chi_{-2}^{(i)}). \tag{33}$$

如果將方程式(33)與剛才的(22)-(31)一起解的話，就可以得到 $U^{(0)}$，$U^{(1)}$，$U^{(2)}$，也就得到熱泳速度 U 展開至 ε 二次的解。

在結果呈現的部分，我們可以求近球形的橢球，包括長橢球及短橢球的熱泳速度，溫度梯度 $\mathbf{G}$ 在對稱軸方向(假設為 z 軸方向)，所以 $\mathbf{G}=-E_{\infty}\mathbf{e}_{z}$，其中 E_{∞} 為正值。橢球的方程式在圓柱座標(ρ,ϕ,z)可以表示成

$$\frac{\rho^{2}}{a^{2}}+\frac{z^{2}}{b^{2}}=1 \tag{34}$$

其中$b = a(1-\varepsilon)$。從方程式(34)來看，當變形參數$\varepsilon = 0$時式是指半徑a的球形，而當$\varepsilon > 0$時是長橢球，$\varepsilon < 0$時是扁橢球。

如果把方程式(34)以球座標表示，再對變形參數ε展開至二次，代入方程式(9)後就求得橢球表面的單位法線向量，再用前面的式子及邊界條件，最後求得溫度分佈，流體速度分佈以及橢球的熱泳速度對ε展開至一次及二次的結果。要注意的是，由於橢球是軸對稱的原因，所以不用考慮ϕ的影響。

在研究當中，預計可能遭遇的困難將會是對變形參數展開到二次的推導，尤其是在邊界條件方程式的部分，即方程式(19)及(25)，相較於展開至一次來說，這裡的計算很容易發生錯誤，原因是除了要算的式子十分的繁雜以外，將r對$r = a$展開的過程中可能有所疏忽。可能的解決方法是不要直接進行熱泳的推導，先從邊界可滑移的橢球垂直於對稱軸的緩流運動開始做起，等到確定沒有問題後再進一步分析熱泳問題。